Elementare Algebra

Rechenoperationen und Rechengesetze

Monotoniegesetze $(a, b, c \in \mathbb{R})$

$a < b \Leftrightarrow b > a \Leftrightarrow (b - a) > 0$

Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.

Aus $a < b$ folgt $-a > -b$.

Aus $a < b$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$ $(c > 0)$.

Aus $a < b$ folgt $a \cdot c > b \cdot c$ $(c < 0)$.

Aus $a < b$ folgt $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ für $a > 0$.

Kehrzahl

Zu einer Zahl $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt $\frac{1}{a}$ **Kehrzahl** von a. Es gilt $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Gegenzahl und Betrag

Zu einer Zahl a heißt $-a$ **Gegenzahl** von a. Es gilt $a + (-a) = 0$.
Zahl und Gegenzahl haben auf der Zahlengeraden denselben Abstand vom Nullpunkt.

Betrag einer Zahl

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Der Betrag einer Zahl entspricht dem Abstand der Zahl vom Nullpunkt auf der Zahlengeraden.

$|a| = |-a|$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; $|a : b| = |a| : |b|$

$|a + b| \leq |a| + |b|$ **(Dreiecksungleichung)**

$|a + b| \geq \big||a| - |b|\big|$

$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$

Termumformungen

Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Terme der Form $(a + b)^n$ kann man auch mithilfe des Pascal'schen Dreiecks als Summe schreiben:

Pascal'sches Dreieck

	1	
$n = 1$	1 1	$(a + b)^1 = a + b$
$n = 2$	1 2 1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$n = 3$	1 3 3 1	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$n = 4$	1 4 6 4 1	$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$n = 5$	1 5 10 10 5 1	$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
…	…	…

Potenzen und Wurzeln

Definitionen und Begriffe

Potenzen

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt **Basis (Grundzahl)**, $n \in \mathbb{N}^*$ **Exponent (Hochzahl)**.

$a^1 = a$ $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$ 0^0 ist nicht definiert.

Wertgleiche Terme – Termumformungen

Zwei Terme sind **wertgleich**, wenn sie für alle Einsetzungen der Variablen denselben Wert haben.

Mit einer **Termumformung** formt man einen Term unter Verwendung der Rechengesetze in einen wertgleichen Term um.

Gleichungen und Ungleichungen

Verbindet man zwei Terme T_1 und T_2 durch ein Gleichheitszeichen (Ungleichheitszeichen), so entsteht eine **Gleichung (Ungleichung)**.

Enthalten T_1 und T_2 keine Variablen, also nur Zahlen, so stellt die Gleichung (Ungleichung) eine **Aussage** dar, die entweder **wahr** oder **falsch** sein kann.
Beispiele: $3 + 5 = 10 - 2$ wahr $\quad 2 - 6 > 6 - 1$ falsch

Aussageform → S. 2

Enthält mindestens einer der beiden Terme eine oder mehrere Variablen, dann ist die Gleichung (Ungleichung) eine **Aussageform**. Wenn man für die Variablen Zahlen einsetzt, wird die Aussageform zu einer **wahren** oder **falschen Aussage**.
Beispiele: $2x - 1 = 5x + 2 \quad 2x - 1 \geq 5x + 2$

Alle Elemente der Definitionsmenge D, die beim Einsetzen eine wahre Aussage ergeben (die Gleichung (Ungleichung) erfüllen), sind Lösungen der Gleichung (Ungleichung). Sie bilden die **Lösungsmenge L** der Gleichung. L ist eine Teilmenge von D.

Lösbarkeit von Gleichungen und Ungleichungen

Eine Gleichung (Ungleichung) heißt bezüglich einer Grundmenge G
allgemeingültig, wenn $L = G$ ist,
lösbar, wenn $L \neq \{\,\}$ ist,
unlösbar, wenn $L = \{\,\}$ ist,

Äquivalenz von Gleichungen und Ungleichungen

Gleichungen (Ungleichungen), die bezüglich einer Grundmenge dieselbe Lösungsmenge haben, heißen **zueinander äquivalent** bezüglich dieser Grundmenge. Sind zwei Gleichungen (Ungleichungen) zueinander äquivalent, setzt man das Zeichen $\Leftrightarrow$ zwischen sie.

Äquivalenzumformungen von Gleichungen und Ungleichungen

Umformungen, die eine Gleichung (Ungleichung) in eine dazu äquivalente Gleichung (Ungleichung) umformen, heißen **Äquivalenzumformungen**.

Wichtige Äquivalenzumformungen bei Gleichungen sind:
- Termumformungen der Terme auf der linken und rechten Seite der Gleichung,
- die Addition (oder Subtraktion) derselben Zahl oder desselben Terms auf beiden Seiten der Gleichung,
- die Multiplikation beider Seiten mit derselben von null verschiedenen Zahl bzw. die Division beider Seiten durch dieselbe von null verschiedenen Zahl.

Ungleichungen kann man mit denselben Äquivalenzumformungen lösen. Multipliziert man aber eine Ungleichung mit einer negativen Zahl bzw. dividiert man durch eine negative Zahl, so muss man das Relationszeichen umdrehen. Vertauscht man die Seiten einer Ungleichung, so muss man das Relationszeichen ebenfalls umdrehen.

Man versucht beim Lösen einer Gleichung, die gegebene Gleichung durch Äquivalenzumformungen so umzuformen, dass man die Lösungsmenge ablesen kann. Dazu sollte die Variable zum Schluss allein auf einer Seite der Gleichung stehen.

Gleichungsarten

Lineare Gleichungen ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

Anzahl der Variablen	eine	zwei
Normalform	$ax + b = 0$ ($a, b = \text{const.};\ a \neq 0$)	$ax + by = c$ ($a, b, c = \text{const.};\ a, b \neq 0$)
Lösungsmenge	$L = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$	$L = \left\{\{x; y\} \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right\}$

Quadratische Gleichungen ($a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$)

Allgemeine Form
$ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b = \text{const.};\ a \neq 0$)

Diskriminante: $D = b^2 - 4ac$

Lösungen:
$D = 0$: genau eine Lösung (Doppellösung)
$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$D > 0$: zwei Lösungen
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$D < 0$: keine Lösung in $\mathbb{R}$

Zerlegung in Linearfaktoren:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Satz von Vieta:
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ und $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Normalform
$x^2 + px + q = 0$ ($p, q = \text{const.}$)

Diskriminante: $D = \frac{p^2}{4} - q$

Lösungen:
$D = 0$: genau eine Lösung (Doppellösung)
$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$
$D > 0$: zwei Lösungen
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$
$D < 0$: keine Lösung in $\mathbb{R}$

Zerlegung in Linearfaktoren:
$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = 0$

Satz von Vieta:
$x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 x_2 = q$

Biquadratische Gleichungen

Gleichungen 4. Grades der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ bzw. $x^4 + px^2 + q = 0$ heißen **biquadratische Gleichungen**. Sie können durch die Substitution $x^2 = z$ auf eine quadratische Gleichung in z zurückgeführt werden: $az^2 + bz + c = 0$ bzw. $z^2 + pz + q = 0$. Hat diese Gleichung die nichtnegativen Lösungen z_1 und z_2, so sind $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$ die Lösungen der biquadratischen Gleichung.

Gleichungen höheren Grades ($a_i \in \mathbb{R};\ x_i \in \mathbb{C};\ n \in \mathbb{N}^*$)

Eine Gleichung der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$) heißt (algebraische) **Gleichung n-ten Grades**.
Dabei heißt $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ **Polynom n-ten Grades**.

Fundamentalsatz der Algebra

Jede Gleichung n-ten Grades hat in der Menge der komplexen Zahlen mindestens eine Lösung. Berücksichtigt man die Vielfachheit der Lösungen, so gibt es in der Menge der komplexen Zahlen genau n Lösungen.

Wenn $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die Lösungen mit den Vielfachheiten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sind, so ist $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = n$ und die Gleichung hat die Produktdarstellung
$a_n (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_{k-1})^{\alpha_{k-1}} (x - x_k)^{\alpha_k} = 0$.
Speziell für n verschiedene Lösungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ergibt sich
$a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_k) = 0$.
Das Polynom $P_n(x)$ zerfällt entsprechend in Linearfaktoren.

Ist $z = a + bi$ ($z \in \mathbb{C}$) eine Lösung, so ist auch $\bar{z} = a - bi$ eine Lösung mit der gleichen Vielfachheit wie z.

Elementare Algebra

Fundamentalsatz der Algebra

Ganzrationale Funktion → S. 25

Eine Gleichung n-ten Grades hat in der Menge der reellen Zahlen höchstens n reelle Lösungen. Ist n ungerade, so hat die Gleichung mindestens eine reelle Lösung, für gerade n muss es keine Lösung geben.
Die Lösungen sind die Nullstellen der ganzrationalen Funktion $P_n(x)$.

„Reelle Version des Fundamentalsatzes der Algebra":
Jedes Polynom $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit reellen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ lässt sich als Produkt von linearen und/oder quadratischen Faktoren mit reellen Koeffizienten schreiben. Dabei haben die quadratischen Faktoren keine reellen Nullstellen.

Zum Lösen von Gleichungen n-ten Grades:
Ist $P_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades und $x_1 \neq 0$ eine Lösung der Gleichung $P_n(x) = 0$, so kann man $P_n(x)$ mithilfe der Polynomdivision ohne Rest durch $(x - x_1)$ dividieren.
Man erhält ein Polynom $(n - 1)$-ten Grades: $P_n(x) = (x - x_1)\,P_{n-1}(x)$.

$3x^3 + 6x^2 - 3x - 6 = 0.$ $x_1 = 1$ ist Lösung.

$$
\begin{array}{l}
(3x^3 + 6x^2 - 3x - 6) : (x - 1) = 3x^2 + 9x + 6 \\
\underline{-(3x^3 - 3x^2)} \\
\qquad 9x^2 - 3x \\
\qquad \underline{-(9x^2 - 9x)} \\
\qquad\qquad 6x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{-(6x - 6)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x_2 = -1 \qquad x_3 = -2$

$3x^3 + 6x^2 - 3x - 6 = 3(x - 1)(x + 1)(x + 2)$

Bruchgleichungen

Eine Gleichung, bei der mindestens ein Bruch mit der Variable im Nenner vorkommt, heißt **Bruchgleichung**. Die Defintionsmenge umfasst alle Zahlen, für die alle vorkommenden Nenner ungleich null sind.
Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner entsteht eine Gleichung n-ten Grades. Es ist zu prüfen, ob die Lösungen der entstandenen Gleichung zur Defintionsmenge der Bruchgleichung gehören.

Wurzelgleichungen

Eine Gleichung, bei der die Variable mindestens einmal im Radikanden einer Wurzel vorkommt, heißt **Wurzelgleichung**. Es kann sich um Quadratwurzeln oder um Wurzeln mit beliebigen Wurzelexponenten handeln. Die Defintionsmenge umfasst alle Zahlen, für die alle vorkommenden Radikanden nicht negativ sind.
Lässt sich durch Äquivalenzumformungen der Wurzelterm isolieren, so kann die entstehende Gleichung durch Potenzieren beider Seiten eventuell gelöst werden. Da Potenzieren aber keine Äquivalenzumformung ist, muss man unbedingt eine Probe machen.

Exponentialgleichungen

Eine Gleichung, bei der die Variable mindestens einmal im Exponenten einer Potenz auftritt, heißt **Exponentialgleichung**. Zum Lösen kann man die Gleichung logarithmieren und die Variable isolieren. Kann man die Gleichung auf die Form $a^x = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ und $a \neq 1$ bringen, so ist $x = \log_a(b)$ Lösung der Gleichung.

Logarithmusgleichungen

Eine Gleichung, bei der die Variable mindestens einmal im Argument eines Logarithmus (also im Numerus) auftritt, heißt **Logarithmusgleichung**. Kann man die Gleichung auf die Form $\log_a(x) = b$ mit $a, x \in \mathbb{R}$, $a, x > 0$ und $a \neq 1$ bringen, so ist $x = a^b$ Lösung der Gleichung.