I Lineare Gleichungssysteme

1 Das Gauß-Verfahren

Seite 8

Einstiegsproblem

Bezeichnet man das Alter des Großvaters mit g und das des Enkels mit e, so gilt: $g + e = 78$ und $(g - 4) = 6(e - 4)$. Löst man das Gleichungssystem z.B. mit dem Einsetzungsverfahren erhält man: $e = 14$ und $g = 64$. Der Enkel ist also 14 Jahre und der Großvater 64 Jahre alt.

Seite 10

1 a) $(3; -1; 2)$ b) $\left(-\frac{7}{3}; \frac{3}{4}; -2\right)$
c) $(0; -4; 3{,}5)$

2 a) $(-0{,}5; 0{,}5; 3)$ b) $\left(\frac{22}{15}; \frac{3}{5}; 2\right)$
c) $\left(\frac{21}{4}; 4; -5\right)$

3 Im ursprünglichen linearen Gleichungssystem kann man aus der letzten Zeile ($12x_2 = -12$) sofort x_2 bestimmen: $x_2 = -1$. Setzt man dieses Ergebnis in die zweite Zeile ein, so erhält man: $x_1 = 1$. Beide Ergebnisse in die erste Zeile eingesetzt, liefert: $x_3 = -3$. Lösung: $L = \{(1; -1; -3)\}$.

4 a) $(4; 1; 1)$ b) $\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; 0\right)$
c) $\left(\frac{7}{4}; -\frac{7}{2}; 2\right)$

5 a) $(1; 1; 1)$ b) $(0; 1; 2)$
c) $\left(-\frac{8}{7}; \frac{2}{7}; \frac{11}{7}\right)$

6 a) $L = \{(1; 0; 0)\}$ b) $L = \left\{\left(\frac{87}{113}; \frac{182}{113}; \frac{359}{113}\right)\right\}$
c) $L = \{(1; 0; 0)\}$

7 a) Richtig ist:
III a: $2x_2 + x_3 = -9$.
b) Richtig ist:
II a: $10x_2 - 3x_3 = -16$.

Seite 11

9 a) $L = \{(4; 2; -1)\}$ b) $L = \left\{\left(-2; \frac{1}{4}; -2\right)\right\}$
c) $L = \{(-5; 0; 0)\}$

10 Z.B.:

a) $x_1 + x_2 + x_3 = 6$
$x_1 - x_2 - x_3 = -4$
$x_1 - x_2 + x_3 = 2$

b) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$x_1 - x_2 - x_3 = -8$
$x_1 - x_2 + x_3 = -6$

c) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$x_1 - x_2 - x_3 = -1$
$x_1 - x_2 + x_3 = 1$

d) $x_1 + x_2 + x_3 = 9$
$x_1 - x_2 - x_3 = -9$
$x_1 - x_2 + x_3 = 3$

11 a) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{38}{3}; -6\right)$ b) $\left(-1; 2; \frac{8}{3}\right)$
c) $\left(2; -8; -\frac{49}{3}\right)$ d) $(2; 1; 3)$
e) $(1; 0; 1)$ f) $(0; 1; 2)$

12 Aufgabe 1: Der erste Umformungsschritt ist der Schnipsel links unten und als zweiter Schritt der Schnipsel rechts oben. Die Lösung lautet: $L = \{(1; 1; 1)\}$.
Aufgabe 2: Der erste Umformungsschritt ist der Schnipsel links oben und als zweiter Schritt der Schnipsel rechts unten. Die Lösung lautet: $L = \{(5; 3; 1)\}$.

13 a) $L = \{(-5; -1; -1)\}$
b) $L = \left\{\left(\frac{3}{7}; -\frac{6}{7}; -\frac{23}{7}\right)\right\}$
c) $L = \{(2; 3; 3)\}$

14 a) Ja.
b) Nein, die Multiplikation mit Null ist keine Äquivalenzumformung.
c) Nein. d) Ja.

Seite 12

15 a) $(2r; r)$ b) $(-3r; 4r)$
c) $\left(\frac{1}{2}r - 5; -8\right)$ d) $(r; 0; 0)$
e) $(r + 1; r + 1; r - 1)$
f) $\left(-\frac{19}{14} - \frac{9}{28}r; -\frac{1}{7} + \frac{1}{14}r; \frac{5}{2} + \frac{3}{4}r\right)$

16 a) Lösung: $\left(\frac{18}{5} + \frac{14}{5}r; \frac{18}{5} + \frac{24}{5}r; 6 + 4r\right)$, $r = 0$
b) Lösung: $(5 - r; -6 + 4{,}5r; -16 + 12{,}5r)$, $r = 2$
c) Lösung: $\left(2 - \frac{1}{2}r; -6 - r; \frac{3}{2} + \frac{3}{2}r\right)$, $r = 4$

2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

Seite 13

Einstiegsproblem
Das Bild ganz links gehört zum LGS ganz rechts; es hat genau eine Lösung.
Das Bild in der Mitte gehört zum linken LGS: es hat unendlich viele Lösungen.
Das Bild rechts gehört zum LGS in der Mitte: es hat keine Lösung.

Seite 14

1 a) Das LGS hat genau eine Lösung: $L = \{(6; 2; 3)\}$.
b) Das LGS hat keine Lösung.
c) Das LGS hat keine Lösung.

2 a) $L = \{(1 - t; 1 + t; t)\}$
b) $L = \{(3 + 5t; 0{,}5 + 2t; t)\}$
c) $L = \{(4; 2t; t)\}$

3 a) $L = \{(1; -1; 3)\}$
b) $L = \{(2 - 1{,}5t; 1{,}5 + 0{,}75t; t)\}$
c) $L = \{(2 + t; 1 + 2t; t)\}$

Seite 15

4 a) $L = \{(1; 1; 1)\}$ b) $L = \{\ \}$
c) $L = \{\ \}$

7 a) Ja, für $t = 2$. b) Ja, für $t = -11$.
c) Nein. d) Ja, für $t = 0$.
e) Ja, für $t = 1$.

8 Z.B.:
a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -9 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$
c) $\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 5x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$

9 a) Falsch. Z.B. hat
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 = 8$
keine Lösung.
b) Falsch. Wenn z.B. eine Gleichung das Vielfache einer anderen Gleichung ist.
c) Falsch. Z.B. Aufgabe 1b).
d) Wahr.

10 a) $L = \{(0; 0; 0)\}$, dass dies die einzige Lösung ist, ergibt sich aus dem Rechenweg.
b) $L = \{(t; 2t; t)\}$
c) $L = \{(2 + t; -1 + 2t; t)\}$

3 Bestimmung ganzrationaler Funktionen

Seite 16

Einstiegsproblem
Ja. Zur Bestimmung einer Parabel werden drei Punkte benötigt.
$A(-2|4)$, $B(1|1)$, $C(3{,}5|3)$
$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
LGS: $\begin{aligned} 4a_2 - 2a_1 + a_0 &= 4 \\ a_2 + a_1 + a_0 &= 1 \\ 12{,}25a_2 + 3{,}5a_1 + a_0 &= 3 \end{aligned}$
$a_0 = \frac{74}{55}$; $a_1 = -\frac{37}{55}$; $a_2 = \frac{18}{55}$
$f(x) = \frac{18}{55}x^2 - \frac{37}{55}x + \frac{74}{55}$

Seite 17

1 Ansatz für alle Teilaufgaben:
$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

a) LGS:
$$\begin{aligned} a_2 - a_1 + a_0 &= 0 \\ a_0 &= -1 \\ a_2 + a_1 + a_0 &= 0 \end{aligned}$$
$a_0 = -1;\; a_1 = 0;\; a_2 = 1$
Der Funktionsterm ist: $f(x) = x^2 - 1$.

b) LGS:
$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_2 + a_1 + a_0 &= 0 \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 3 \end{aligned}$$
$a_0 = 0;\; a_1 = -1{,}5;\; a_2 = 1{,}5$
Der Funktionsterm ist: $f(x) = 1{,}5x^2 - 1{,}5x$.

c) LGS:
$$\begin{aligned} a_2 + a_1 + a_0 &= 3 \\ a_2 - a_1 + a_0 &= 2 \\ 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 2 \end{aligned}$$
$a_0 = \frac{11}{4};\; a_1 = \frac{1}{2};\; a_2 = -\frac{1}{4}$
Der Funktionsterm ist:
$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{4}$.

2 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
Punktsymmetrie: $a_2 = a_0 = 0$;
Tiefpunkt bei $x = 1$: $f'(1) = 0$; $f(2) = 2$.
LGS:
$$\begin{aligned} 8a_3 + 2a_1 &= 2 \\ 3a_3 + a_1 &= 0 \end{aligned}$$
$a_3 = 1;\; a_1 = -3$
Der Funktionsterm ist: $f(x) = x^3 - 3x$.

3 Ansatz für alle Teilaufgaben:
$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

a) LGS:
$$\begin{aligned} a_2 - a_1 + a_0 &= -3 \\ a_2 + a_1 + a_0 &= 1 \\ 4a_2 - 2a_1 + a_0 &= 1 \end{aligned}$$
$a_0 = -3;\; a_1 = 2;\; a_2 = 2$
Der Funktionsterm ist:
$f(x) = 2x^2 + 2x - 3$.

b) LGS:
$$\begin{aligned} 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 0 \\ 4a_2 - 2a_1 + a_0 &= 0 \end{aligned}$$
$a_0 = k;\; a_1 = 0;\; a_2 = -\frac{k}{4}$
Der Funktionsterm ist:
$f(x) = -\frac{k}{4}x^2 + k,\; k \in \mathbb{R}$.

c) LGS:
$$\begin{aligned} 16a_2 - 4a_1 + a_0 &= 0 \\ a_0 &= -4 \end{aligned}$$
$a_0 = -4;\; a_1 = k;\; a_2 = \frac{1}{4}(k+1)$
Der Funktionsterm ist:
$f(x) = \frac{1}{4}(k+1)x^2 + kx - 4,\; k \in \mathbb{R}$.

4 Ansatz für alle Teilaufgaben:
$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

a) LGS:
$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 0 \\ -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 &= 4 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= -5 \end{aligned}$$
$a_0 = 1;\; a_1 = -1;\; a_2 = 1;\; a_3 = -1$
Der Funktionsterm ist:
$f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$.

b) LGS:
$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 1 \\ -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 &= 7 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 17 \end{aligned}$$
$a_0 = -1;\; a_1 = -\frac{11}{3};\; a_2 = 5;\; a_3 = \frac{2}{3}$
Der Funktionsterm ist:
$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x - 1$.

5 a) Tiefpunkt auf der y-Achse: $f'(0) = 0$
LGS:
$$\begin{aligned} 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 0 \\ -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0 &= 4 \\ -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + a_0 &= 8 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$
$a_0 = \frac{16}{3};\; a_1 = 0;\; a_2 = -\frac{5}{6};\; a_3 = -\frac{1}{4}$
Der Funktionsterm ist:
$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{16}{3}$.
Der Graph dieser Funktion hat an der Stelle $x = 0$ einen Hochpunkt und keinen Tiefpunkt.

b) Tiefpunkt $T(1|1)$: $f(1) = 1$ und $f'(1) = 0$
LGS:
$$\begin{aligned} 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 2 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 9 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 1 \\ 3a_3 + 2a_2 + a_1 &= 0 \end{aligned}$$
$a_0 = 0;\; a_1 = 3;\; a_2 = -3;\; a_3 = 1$
Der Funktionsterm ist: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
Der Graph dieser Funktion hat an der Stelle $x = 1$ einen Sattelpunkt und keinen Tiefpunkt.

6 A(2|0): $f(2) = 0$; W(2|0) Wendepunkt: $f''(2) = 0$; für $x = 3$ Maximum: $f'(3) = 0$

LGS: $8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 0$

$12a_3 + 4a_2 = 0$

$27a_3 + 6a_2 + a_1 = 1$

$a_0 = k$; $a_1 = -4{,}5k$; $a_2 = 3k$; $a_3 = -0{,}5k$

Der Funktionsterm ist:

$f(x) = -0{,}5kx^3 + 3kx^2 - 4{,}5kx + k$

$= k(-0{,}5x^3 + 3x^2 - 4{,}5x + 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

Alle Funktionen dieser Schar besitzen die angegebenen Eigenschaften.

9 $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

P(−4|6) Tiefpunkt: $f(-4) = 6$; $f'(-4) = 0$.

Q(4|2) Wendepunkt mit waagerechter Tangente: $f(4) = 2$; $f''(4) = 0$; $f'(4) = 0$.

LGS: $256a_4 - 64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + a_0 = 6$

$-256a_4 + 48a_3 - 8a_2 + a_1 = 0$

$256a_4 + 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 2$

$192a_4 + 24a_3 + 2a_2 = 0$

$256a_4 + 48a_3 + 8a_2 + a_1 = 0$

$a_0 = \frac{13}{4}$; $a_1 = -\frac{3}{4}$; $a_2 = \frac{3}{32}$; $a_3 = \frac{1}{64}$;

$a_4 = -\frac{3}{1024}$

Der Funktionsterm ist:

$f(x) = -\frac{3}{1024}x^4 + \frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{32}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$.

Der Graph der Funktion f hat aber im Punkt (−4|6) einen Hochpunkt.

Seite 18

10 a) LGS: $9a_2 - 3a_1 + a_0 = 3$

$a_0 = 0$

$a_0 = 0$; $a_1 = 3k - 1$; $a_2 = k$

$f(x) = kx^2 + (3k - 1)x$; $k \in \mathbb{R}$

Die Gleichung der jeweiligen Parabel erhält man aus der Lage des jeweiligen Scheitelpunktes durch eine weitere Gleichung oder indem man den Wert für k direkt abliest (Differenz des y-Werts des Scheitelpunktes zu dem des Punktes mit einem um 1 größeren x-Wert).

Rot: S(0|0), $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

Blau: S(−2|4), $f(x) = -x^2 - 4x$

Schwarz: S(−1|−1), $f(x) = x^2 + 2x$

b) LGS: $16a_2 - 4a_1 + a_0 = 1$

$4a_2 + 2a_1 + a_0 = 1$

$a_0 = -8k + 1$; $a_1 = 2k$; $a_2 = k$

$f(x) = kx^2 + 2kx - 8k + 1$; $k \in \mathbb{R}$

Rot: S(−1|4), $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{13}{4}$

Blau: S(−1|3), $f(x) = -\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{25}{9}$

Schwarz: S(−1|−1), $f(x) = \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{7}{9}$

c) LGS: $9a_2 - 3a_1 + a_0 = 3$

$9a_2 + 3a_1 + a_0 = 0$

$a_0 = -9k + \frac{3}{2}$; $a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_2 = k$

$f(x) = kx^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - 9k$; $k \in \mathbb{R}$

Rot: S(−1|4), $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$

Blau: S(1|−1), $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

Schwarz: S(1|2), $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{21}{8}$

d) LGS: $16a_2 - 4a_1 + a_0 = 0$

$a_0 = 4$

$a_0 = 4$; $a_1 = 4k + 1$; $a_2 = k$

$f(x) = kx^2 + (4k + 1)x + 4$, $k \in \mathbb{R}$

Rot: S(−1|4,5), $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$

Blau: S(−3|0), $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 4$

Schwarz: S(4|0), $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

11 Ansatz für alle Teilaufgaben:

$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

a) Wendepunkt W(0|0) mit x-Achse als Wendetangente: $f(0) = 0$; $f''(0) = 0$; $f'(0) = 0$.

Tiefpunkt T(−1|−2): $f(-1) = -2$; $f'(-1) = 0$.

LGS: $a_0 = 0$

$a_1 = 0$

$2a_2 = 0$

$a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = -2$

$-4a_4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 = 0$

$a_0 = 0$; $a_1 = 0$; $a_2 = 0$; $a_3 = 8$; $a_4 = 6$

Der Funktionsterm ist: $f(x) = 6x^4 + 8x^3$.

Der Graph der Funktion f hat im Punkt (−1|−2) einen Tiefpunkt.

b) In O(0|0) Tangente parallel zur x-Achse: $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$.

Wendepunkt $W(-2|2)$ mit Wendetangente parallel zur x-Achse: $f(-2) = 2$; $f''(-2) = 0$; $f'(-2) = 0$.

LGS:
$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ 2a_2 &= 0 \\ 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0 &= 2 \\ 48a_4 - 12a_3 + 2a_2 &= 0 \\ -32a_4 + 12a_3 - 4a_2 + a_1 &= 0 \end{aligned}$$

$a_0 = 0$; $a_1 = 0$; $a_2 = 3$; $a_3 = 2$; $a_4 = \frac{3}{8}$

Der Funktionsterm ist:
$f(x) = \frac{3}{8}x^4 + 2x^3 + 3x^2$.

Der Graph der Funktion f hat die verlangten Eigenschaften.

c) Symmetrisch zur y-Achse: $a_1 = a_3 = 0$
Punkt $A(0|2)$: $f(0) = 2$
Tiefpunkt $T(1|0)$: $f(1) = 0$; $f'(1) = 0$

LGS:
$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_4 + a_2 + a_0 &= 0 \\ 4a_4 + 2a_2 &= 0 \end{aligned}$$

$a_0 = 2$; $a_1 = 0$; $a_2 = -4$; $a_3 = 0$; $a_4 = 2$

Der Funktionsterm ist:
$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$.

Der Graph der Funktion f hat die verlangten Eigenschaften.

d) Symmetrisch zur y-Achse: $a_1 = a_3 = 0$;
Wendepunkt $W(2|0)$: $f(2) = 0$; $f''(2) = 0$;
Steigung der Wendetangente $-\frac{4}{3}$:
$f'(2) = -\frac{4}{3}$;
Tiefpunkt $T(1|0)$: $f(1) = 0$; $f'(1) = 0$.

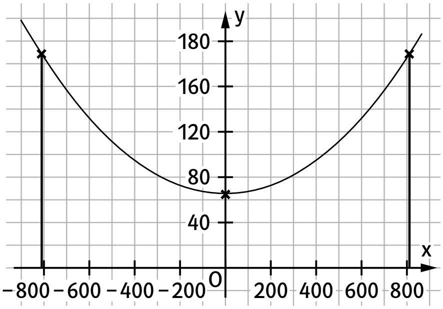
LGS:
$$\begin{aligned} 16a_4 + 4a_2 + a_0 &= 0 \\ 48a_4 + 2a_2 &= 0 \\ 32a_4 + 4a_2 &= -\tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

$a_0 = \frac{5}{3}$; $a_1 = 0$; $a_2 = -\frac{1}{2}$; $a_3 = 0$; $a_4 = \frac{1}{48}$

Der Funktionsterm ist: $f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}$.

Der Graph der Funktion f hat die verlangten Eigenschaften.

12 Das Koordinatensystem sollte man so legen, dass man die Symmetrie ausnutzt:



Ansatz: $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Gegeben sind die Punkte: $(-812|189)$, $(812|189)$ und $(0|65)$.

LGS:
$$\begin{aligned} 659344a_2 - 812a_1 + a_0 &= 189 \\ 659344a_2 + 812a_1 + a_0 &= 189 \\ a_0 &= 65 \end{aligned}$$

$a_0 = 65$; $a_1 = 0$; $a_2 = \frac{124}{659344} = \frac{31}{164836}$

$f(x) = \frac{31}{164836}x^2 + 65$

13 Ansatz:

$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
$f'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$
$f''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$

Aus den Bedingungen $f(-1) = 0$; $f(5) = 0$; $f'(3{,}5) = 0$; $f''(1) = 0$; $f'(1) = 0$ folgt das LGS:
$$\begin{aligned} a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 &= 0 \\ 625a_4 + 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + a_0 &= 0 \\ 171{,}5a_4 + 36{,}75a_3 + 7a_2 + a_1 &= 0 \\ 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 &= 0 \\ 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 &= 0 \end{aligned}$$

$a_0 = k$; $a_1 = \frac{42}{115}k$; $a_2 = -\frac{48}{115}k$; $a_3 = \frac{22}{115}k$;
$a_4 = -\frac{3}{115}k$, $k \in \mathbb{R}$

$f(x) = -\frac{3}{115}kx^4 + \frac{22}{115}kx^3 - \frac{48}{115}kx^2 + \frac{42}{115}kx + k$, $k \in \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{k}{115}(-3x^4 + 22x^3 - 48x^2 + 42x + 115)$, $k \in \mathbb{R}$

Die Graphen werden mit dem Faktor senkrecht zur x-Achse gestreckt.

14 Ansatz:
$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
$f'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$
$f''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$
Aus den Bedingungen $f(-2) = 0$;
$f(-1) = -1$; $f'(-2) = 0$; $f''(-1) = 0$;
$f'(-1) = -3$ folgt das LGS:

$$\begin{array}{rcl} 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0 &=& 0 \\ a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 &=& -1 \\ -32a_4 + 12a_3 - 4a_2 + a_1 &=& 0 \\ 12a_4 - 6a_3 + 2a_2 &=& 0 \\ -4a_4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 &=& -3 \end{array}$$

$a_0 = 4$; $a_1 = 24$; $a_2 = 33$; $a_3 = 17$; $a_4 = 3$
$f(x) = 3x^4 + 17x^3 + 33x^2 + 24x + 4$

4 Die Struktur der Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme

Seite 19

Einstiegsproblem
Alle Lösungen sind richtig. Allgemein gilt:
$L = \{(0{,}5t; -t; t)\}$

Seite 21

1 a) $L = \{(0; 0; 0)\}$
b) $L = \{r(7; 9; 5) \mid r \in \mathbb{R}\}$
c) $L = \{r(3; 2; 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$

2 a)
$L = \{r(-11; 5; 7; 0) + s(1; -3; 0; 7) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
b)
$L = \{r(-14; -7; 5; 0) + s(-3; 0; 0; 1) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
c)
$L = \{r(11; -23; 14; 0) + s(1; -4; 0; 7) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$

3 a) Z.B.
$L = \{r(-5; -3; 1; 0) + s(-7; -2; 0; 1) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
oder
$L = \{r(-12; -5; 1; 1) + s(2; -1; 1; -1) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
b) Z.B.
$L = \{r(-17; 6; 4; 0) + s(3; -1; 0; 1) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
oder
$L = \{r(-14; 5; 4; 1) + s(-20; 7; 4; -1) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
c) Z.B.
$L = \{r(-1; 1; 2; 0) + s(7; -15; 0; 10) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
oder
$L = \{r(6; -14; 2; 10) + s(-8; 16; 2; -10) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$

4 a)
$L = \left\{\left(\frac{50}{3}; \frac{55}{3}; -\frac{20}{3}; 0\right) + r\left(-\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 1\right) \middle| r \in \mathbb{R}\right\}$
$U = L = \left\{r\left(-\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 1\right) \middle| r \in \mathbb{R}\right\}$
b)
$L = \left\{\left(\frac{17}{5}; \frac{36}{5}; -\frac{53}{5}; 0\right) + r\left(-\frac{2}{5}; \frac{3}{10}; -\frac{9}{10}; 1\right) \middle| r \in \mathbb{R}\right\}$
$U = L = \left\{r\left(-\frac{2}{5}; \frac{3}{10}; -\frac{9}{10}; 1\right) \middle| r \in \mathbb{R}\right\}$
c)
$L = \left\{\left(-30; -\frac{260}{7}; -\frac{110}{7}; 0\right) + r(-3; -3; -1; 1) \middle| r \in \mathbb{R}\right\}$
$U = L = \{r(-3; -3; -1; 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$

6 a) $x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0$
b) $x_1 - 2x_3 - 7x_4 = 0$
$x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0$
c) $4x_1 - x_2 = 7$
d) $x_2 + x_3 = 5$
$x_1 + 4x_3 = 9$

7 a)
$L = \{r(5; -2; 2; 0) + s(9; -4; 0; 2) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
$L \neq T$, da z.B. $(9; -4; 0; 2) \notin T$
b) $L = \{r(1; 3; 2; 0) + s(1; -1; 0; 2) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
$L = T$, da
$(1; 3; 2; 0) = (1; 1; 1; 1) - \frac{1}{3}(0; -6; -3; 3)$ und
$(1; -1; 0; 2) = (1; 1; 1; 1) + \frac{1}{3}(0; -6; -3; 3)$

8 $(-2; 0; 4; 2) = 8(2; -6; -7; 1) + 6(-3; 8; 10; -1)$,
$(2; 6; -7; 1) = \frac{1}{8}(-2; 0; 4; 2) - \frac{3}{4}(-3; 8; 10; -1)$,
$(-3; 8; 10; -1) = \frac{1}{6}(2; 0; 4; 2) - \frac{4}{3}(2; -6; -7; 1)$.

Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen

Seite 22

Lösungsmengen von LGS

1 a) $L = \{(3;\ 2;\ -1)\}$
b) $L = \{\ \}$
c) $L = \{(0;\ 0;\ 0)\}$
d) $L = \left\{\left(\frac{25}{7};\ -\frac{80}{7};\ \frac{78}{7}\right)\right\}$
e) $L = \{(-0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75)\}$
f) $L = \{\ \}$

2 a) $L = \{\ \}$
b) $L = \{(100;\ -100;\ 100)\}$
c) $L = \{(-100;\ 100;\ 300)\}$

3 a) $L = \{(-1;\ -1;\ -1)\}$
b) $L = \{(1;\ k;\ 2)\,|\,k \in \mathbb{R}\}$
c) $L = \{(k;\ k;\ k)\,|\,k \in \mathbb{R}\}$

Bestimmung von Funktionstermen

4 Ansatz: Ganzrationale Funktion vierten Grades $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
Mit den Punkten $A(-2|1)$, $B(0|3)$, $C(2|-1)$, $D(3|2)$ und $f'(0) = 0$ folgt das LGS:

$$\begin{aligned} 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0 &= 1 \\ a_0 &= 3 \\ 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= -1 \\ 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 2 \\ 2a_1 &= 0 \end{aligned}$$

$a_0 = 3$; $a_1 = 0$; $a_2 = -\frac{281}{180}$; $a_3 = -\frac{1}{8}$; $a_4 = \frac{73}{360}$

$f(x) = \frac{73}{360}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{281}{180}x^2 + 3$

5 Ansatz: Ganzrationale Funktion vierten Grades $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
$f'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$.
Mit den Punkten $A(-2|-1)$, $B(0|3)$, $C(1|1)$ und $D(3|2)$ des Graphen von f′ und Nullstelle $x = 1$ von f, also $f(1) = 0$, ergibt sich das LGS:

$$\begin{aligned} -32a_4 + 12a_3 - 4a_2 + a_1 &= -1 \\ a_1 &= 3 \\ 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 &= 1 \\ 108a_4 + 27a_3 + 6a_2 + a_1 &= 2 \\ a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

$a_0 = -\frac{49}{24}$; $a_1 = 3$, $a_2 = -\frac{23}{30}$; $a_3 = -\frac{3}{10}$;
$a_4 = \frac{13}{120}$

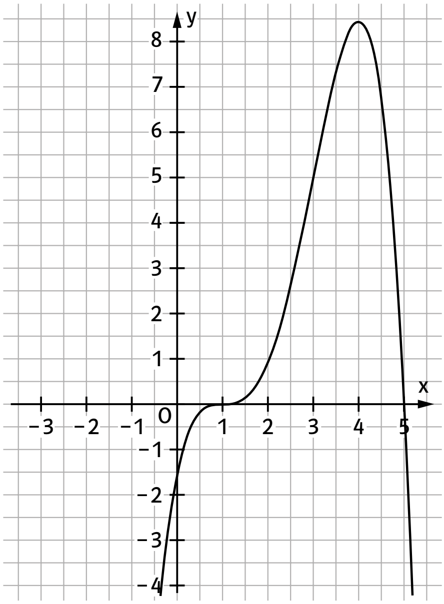
$f(x) = \frac{13}{120}x^4 - \frac{3}{10}x^3 - \frac{23}{30}x^2 + 3x - \frac{49}{24}$

6 Ansatz:
$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
Aus $f(1) = 0$; $f(5) = 0$; $f''(1) = 0$; $f'(1) = 0$ und $f(3) = 5$ erhält man das LGS:

$$\begin{aligned} a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 0 \\ 625a_4 + 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + a_0 &= 0 \\ 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 &= 0 \\ 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 &= 0 \\ 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 5 \end{aligned}$$

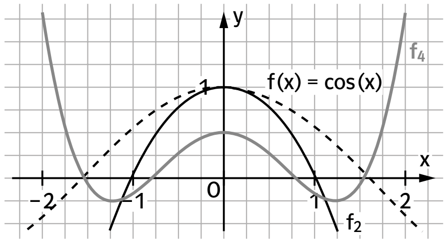
$a_0 = -\frac{25}{16}$; $a_1 = 5$; $a_2 = -\frac{45}{8}$; $a_3 = \frac{5}{2}$;
$a_4 = -\frac{5}{16}$

$f(x) = -\frac{5}{16}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{45}{8}x^2 + 5x - \frac{25}{16}$



Das absolute Maximum liegt bei $\left(4\,\middle|\,\frac{135}{16}\right)$.

7 a) Ansatz: $f_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
$f_2(0) = \cos(0) = 1$, $f_2'(0) = -\sin(0) = 0$;
$f_2''(0) = -\cos(0) = -1$
Es ergibt sich das LGS:
$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -0{,}5 \end{aligned}$$
$f_2(x) = -0{,}5x^2 + 1$
(Grafik siehe bei Teilaufgabe b))
b) Ansatz:
$f_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
$f_4(0) = \cos(0) = 1$, $f_4'(0) = -\sin(0) = 0$;
$f_4''(0) = -\cos(0) = -1$; $f_4'''(0) = \sin(0) = 0$;
$f_4''''(0) = \cos(0) = 1$
Es ergibt sich das LGS:
$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -0{,}5 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= \tfrac{1}{24} \end{aligned}$$
$f_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$



c) $f_4(1) - \cos(1) \approx 0{,}5417 - 0{,}5403 = 0{,}0014$

Seite 23

Struktur von Lösungsmengen

8 a) $L = L'$, da $(10; 7; 27) = 7(1; 0; 4) + (3; 7; -1)$ und $(-2; -7; 5) = (1; 0; 4) - (3; 7; -1)$
b) $L \neq L'$, da z. B. $(-1; 5; 11) \notin L$

9 a) $L = \left\{\left(\frac{7}{12}; \frac{3}{2}; 0\right) + r\left(\frac{5}{12}; -\frac{1}{2}; 1\right) \middle| r \in \mathbb{R}\right\}$
b) $L = \{(0; 9; 0) + r(1; -2; 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$
c) $L = \left\{\left(\frac{35}{26}; -\frac{23}{13}; 0\right) + r\left(-\frac{35}{26}; \frac{10}{13}; 1\right) \middle| r \in \mathbb{R}\right\}$
d) $L = \left\{\left(-\frac{17}{3}; 0; 0\right) + r\left(\frac{1}{3}; 1; 0\right) + s\left(\frac{1}{3}; 0; 1\right) \middle| r, s \in \mathbb{R}\right\}$
e) $L = \left\{\left(\frac{9}{2}; 0; 0\right) + r\left(-\frac{5}{2}; 1; 0\right) + s\left(\frac{7}{2}; 0; 1\right) \middle| r, s \in \mathbb{R}\right\}$
f) $L = \{(6; 0; 0) + r(5; 1; 0) + s(0; 0; 1) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$

10 a) LGS mit ganzzahligen Koordinaten:
$$\begin{aligned} 20x_1 - 5x_2 + 12x_3 &= 72 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 &= -25 \end{aligned}$$
$L = \left\{\left(\frac{163}{90}; -\frac{322}{45}; 0\right) + r\left(\frac{1}{45}; \frac{112}{45}; 1\right) \middle| r \in \mathbb{R}\right\}$
b) LGS mit ganzzahligen Koordinaten:
$$\begin{aligned} 5x_1 + 8x_3 - 12x_4 &= 0 \\ 15x_2 + 4x_3 - 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$
$L = \left\{\left(0; \frac{1}{3}; 0; 0\right) + r\left(-\frac{8}{5}; -\frac{4}{15}; 1; 0\right) + s\left(\frac{12}{5}; \frac{4}{15}; 0; 1\right) \middle| r, s \in \mathbb{R}\right\}$

11 a) Mit x_1 für (–; –), x_2 für (S; –), x_3 für (–; K) und x_4 für (S; K) erhält man das LGS
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 100\,000 \\ x_2 + x_4 &= 65\,100 \\ x_3 + x_4 &= 12\,600 \end{aligned}$$
mit L =
$\{(22\,300 + r;\ 65\,100 - r;\ 12\,600 - r;\ r) \mid r \notin \mathbb{R}\}$
Diese Lösung ist nicht eindeutig.
b) 22 300, da r nicht negativ ist.
c) Aus $12\,600 - r = 0$ folgt $r = 12\,600$, und damit wählten 34 900 keine Sonderausstattung.

Seite 24

12 x_1: Menge des Kabeljaus in 100 g,
x_2: Menge der Kartoffeln in 100 g,
x_3: Menge der Butter in 100 g.
LGS:
$$\begin{aligned} 16{,}5x_1 + 2x_2 + 0{,}8x_3 &= 75 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 + 82x_3 &= 75 \\ 0x_1 + 20{,}9x_2 + 0{,}7x_3 &= 400 \end{aligned}$$
$L = \{(2{,}188; 19{,}110; 0{,}857)\}$
(Näherungswerte)

Er benötigt ungefähr 219 g Kabeljau, 1911 g Kartoffeln und 86 g Butter.

13 x_1: pairs Gauss, x_2: pairs Roebecks, x_3: pairs K Scottish.

LGS:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 120 \\ 50x_1 + 50x_2 + 45x_3 &= 5700 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

$L = \{(30; 30; 60)\}$

14 a) m: Anzahl der Pud des Maulesels, e: Anzahl der Pud des Esels.

LGS:
$$\begin{aligned} e + 1 &= 2(m - 1) \\ m + 1 &= 3(e - 1) \end{aligned}$$

$L = \left\{\left(\frac{11}{5}; \frac{13}{5}\right)\right\}$

b) m: Anzahl der Männer, f: Anzahl der Frauen.

$16f - 25m = 1$

$f = \frac{1 + 25m}{16}$

Die Zahl $1 + 25m$ ist durch 16 ohne Rest teilbar, wenn gilt: $m = 16n + 7$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Lösung mit der kleinsten Anzahl: $m = 7$ und $f = 11$.

c) LGS:
$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 &= 100 \\ x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= 100 \\ \tfrac{1}{4}x_1 + x_3 &= 100 \end{aligned}$$

$L = \{(64; 72; 84)\}$

d) w: Anzahl weißer Tücher, s: Anzahl schwarzer Tücher, b: Anzahl blauer Tücher.

LGS:
$$\begin{aligned} 2w + 3s + 7b &= 140 \\ -w + s &= 2 \\ -s + b &= 3 \end{aligned}$$

$L = \left\{\left(\frac{33}{4}; \frac{41}{4}; \frac{53}{4}\right)\right\}$

15 b: Anzahl der Büffel, h: Anzahl der Hammel, s: Anzahl der Schweine.

LGS:
$$\begin{aligned} 2b + 5h - 13s &= 1000 \\ 3b - 9h + 3s &= 0 \\ -5b + 6h + 8s &= -600 \end{aligned}$$

$L = \{(1200; 500; 300)\}$

16
$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180° \\ \alpha - 2\beta &= 0° \\ \beta - \gamma &= 20° \end{aligned}$$

$L = \{(100°; 50°; 30°)\}$

Exkursion: Trassierungen

Seite 28

1 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{für } x \le -3 \\ \frac{1}{2}x & \text{für } x \ge 3 \end{cases}$

a) Bedingungen für die gesuchte Funktion g: $g(-3) = f(-3) = 2$; $g(3) = f(3) = 2$

$g'(-3) = f'(-3) = -\frac{1}{2}$; $g'(3) = f'(3) = \frac{1}{2}$

$g''(-3) = f''(-3) = 0$; $g''(3) = f''(3) = 0$

Ansatz:

$g(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

LGS:
$$\begin{aligned} -243a_5 + 81a_4 - 27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + a_0 &= 2 \\ 243a_5 + 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + a_0 &= 2 \\ 405a_5 - 108a_4 + 27a_3 - 6a_2 + 3a_1 &= -\tfrac{1}{2} \\ 405a_5 + 108a_4 + 27a_3 - 6a_2 + 3a_1 &= \tfrac{1}{2} \\ -540a_5 + 108a_4 - 18a_3 + 2 &= 0 \\ 540a_5 + 108a_4 + 18a_3 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung des LGS:

$a_0 = \frac{17}{16}$; $a_1 = 0$; $a_2 = \frac{1}{8}$; $a_3 = 0$; $a_4 = -\frac{1}{432}$; $a_5 = 0$

b) $h(x) = \frac{1}{12}x^2 + \frac{15}{12}$; $h'(x) = \frac{1}{6}x$; $h''(x) = \frac{1}{6}$

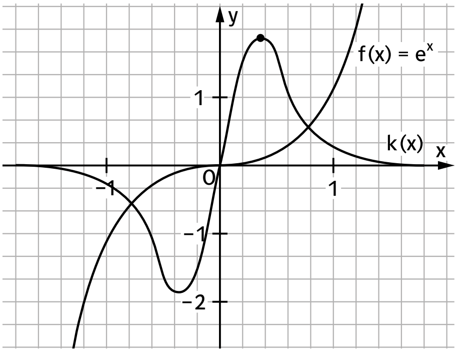
Man erhält: $h'(-3) = -\frac{1}{2}$ und $h'(3) = -\frac{1}{2}$

$h'(-3) = \frac{1}{6}$ und $h'(3) = \frac{1}{6}$

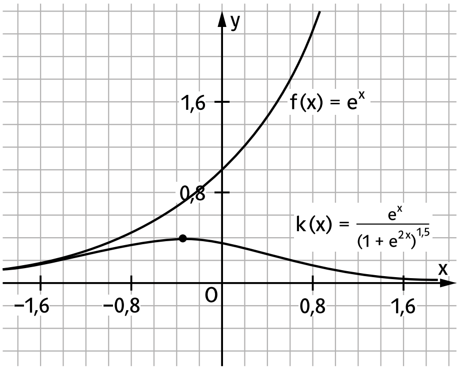
Also entsteht an den Anschlusspunkten ein Krümmungsruck.

c) Beim Graphen von f liegt der Scheitelpunkt bei einem niedrigeren y-Wert als beim Graphen von h. Während der Graph von h″ eine Parallele zur x-Achse darstellt, stellt der Graph von f″ eine Parabel mit Nullstellen in den Verbindungsstellen dar.

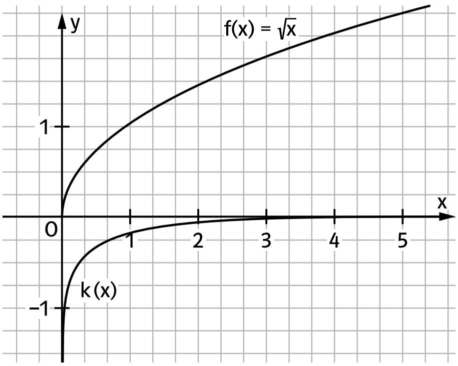
2 a) Die Stelle mit der maximalen Krümmung ist im Maximum der Funktion k(x) bei $x \approx 0{,}39$.



b) Die Stelle mit der maximalen Krümmung ist im Maximum der Funktion k(x) bei $x \approx 0{,}35$.



c) Der Graph hat keine maximale Krümmung. Für immer größer werdende x wird die Krümmung immer kleiner und nähert sich Null an.



Exkursion: Kubische Splines

Seite 30

1 a) Ansatz $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Bedingungen:

$f(0) = 0;\ f(2) = 1;\ f(3) = 3;\ f(4) = 5$

LGS:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 1 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 3 \\ 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 &= 5 \end{aligned}$$

Lösung des LGS:

$a_0 = 0;\ a_1 = -\frac{5}{4};\ a_2 = \frac{9}{8};\ a_3 = -\frac{1}{8}$

$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{8}x^2 - \frac{5}{4}x$

b)

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ für $0 \le x \le 2$

$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$

$f''(x) = 6a_3x + 2a_2$

$g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ für $2 \le x \le 3$

$g'(x) = 3b_3x^2 + 2b_2x + b_1$

$g''(x) = 6b_3x + 2b_2$

$h(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ für $3 \le x \le 4$

$h'(x) = 3c_3x^2 + 2c_2x + c_1$

$h''(x) = 6c_3x + 2c_2$

(siehe Tabelle unten)

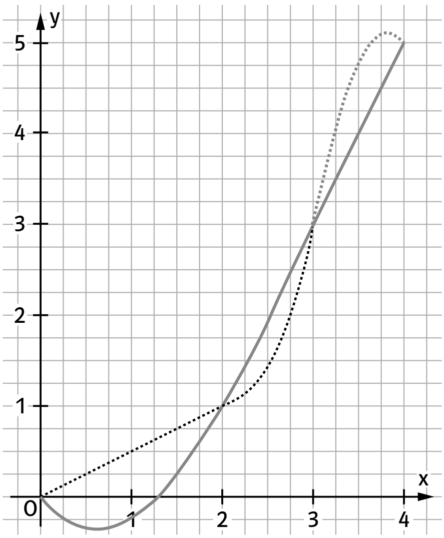
$a_3 = -0{,}0021739;\ a_2 = 0;\ a_1 = \frac{117}{230};\ a_0 = 0$

$b_3 = \frac{176}{115};\ b_2 = -9{,}1956;\ b_1 = \frac{189}{10};\ b_0 = -\frac{282}{23}$

$c_3 = -\frac{7}{46};\ c_2 = -\frac{351}{230};\ c_1 = \frac{2106}{115};\ c_0 = -\frac{3921}{115}$

$$s(x) = \begin{cases} -0{,}002179x^3 + \frac{117}{230}x & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ \frac{176}{115}x^3 - 9{,}1956x^2 + \frac{189}{10}x - \frac{282}{23} & \text{für } 2 \le x \le 3 \\ -\frac{7}{46}x^3 - \frac{351}{230}x^2 + \frac{2106}{115}x - \frac{3921}{115} & \text{für } 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

Bedingung	a_3	a_2	a_1	a_0	b_3	b_2	b_1	b_0	c_3	c_2	c_1	c_0	
1. $f(0) = 0$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2. $f(2) = 1$	8	4	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3. $g(2) = 1$	0	0	0	0	8	4	2	1	0	0	0	0	1
4. $g(3) = 3$	0	0	0	0	27	9	3	1	0	0	0	0	3
5. $h(3) = 3$	0	0	0	0	0	0	0	0	27	9	3	1	3
6. $h(4) = 5$	0	0	0	0	0	0	0	0	64	16	4	1	5
7. $f'(2) = g'(2)$	12	4	1	0	−12	−4	−1	0	0	0	0	0	0
8. $g'(3) = h'(3)$	0	0	0	0	27	6	1	0	−27	−6	−1	0	0
9. $f''(0) = 0$	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10. $f''(2) = g''(2)$	12	2	0	0	−12	−2	0	0	0	0	0	0	0
11. $g''(3) = h''(3)$	0	0	0	0	18	2	0	0	0	−18	−2	0	0
12. $h''(4) = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	2	0	0



c) Mögliche Aspekte: Länge der Trassen, Kurven

Gesucht ist das Maximum der Funktion

$$d(x) = -\frac{7}{46}x^3 - \frac{351}{230}x^2 + \frac{2106}{115}x - \frac{3921}{115} - \left(-\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{8}x^2 - \frac{5}{4}x\right).$$

Mit dem GTR wird das Maximum dieser Differenz bestimmt. Ergebnis: $x = 3{,}5$

Die maximale Abweichung tritt an der Stelle $x = 3{,}5$ auf und beträgt 0,7341.

2 a) Ansatz: $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Bedingungen:

$$\begin{aligned} f(0) = 0 \quad &\Rightarrow & a_0 &= 0 \\ f(0{,}5) = 0{,}5 \quad &\Rightarrow \quad 0{,}25a_2 + 0{,}5a_1 + & a_0 &= 0{,}5 \\ f(1) = 0{,}6 \quad &\Rightarrow \quad a_2 + a_1 + & a_0 &= 0{,}6 \end{aligned}$$

$a_2 = -0{,}8$; $a_1 = 1{,}4$; $a_0 = 0$

Lösung: $f(x) = -0{,}8x^2 + 1{,}4x$

b) $s(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } 0 \le x \le 0{,}5 \\ h(x) & \text{für } 0{,}5 \le x \le 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} g(x) &= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \\ g'(x) &= 3b_3x^2 + 2b_2x + b_1 \\ g''(x) &= 6b_3x + 2b_2 \\ h(x) &= c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \\ h'(x) &= 3c_3x^2 + 2c_2x + c_1 \\ h''(x) &= 6c_3x + 2c_2 \end{aligned}$$

Bedingungen: $g(0) = 0 \Rightarrow b_0 = 0$

$g''(0) = 0 \Rightarrow b_2 = 0$

übrige Bedingungen	b_3	b_1	c_3	c_2	c_1	c_0	
$g(0{,}5) = 0{,}5$	0,125	0,5					0,5
$g'(0{,}5) = h'(0{,}5)$	0,75	1	−0,75	−1	−1		
$h(1) = 0{,}6$			1	1	1	1	0,6
$g''(0{,}5) = h''(0{,}5)$	3		−3	−1			
$h''(1) = 0$			6	2			0
$h(0{,}5) = 0{,}5$			0,125	0,25	0,5	1	0,5

Lösung des Gleichungssystems:

$b_3 = 0$; $b_1 = 1$; $c_3 = 1{,}6$; $c_2 = -4{,}8$; $c_1 = 4{,}6$; $c_0 = -0{,}8$

$g(x) = x$

$h(x) = 1{,}6x^3 - 4{,}8x^2 + 4{,}6x - 0{,}8$

c) $s(x) =$

$$\begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le 0{,}5 \\ 1{,}6x^3 - 4{,}8x^2 + 4{,}6x - 0{,}8 & \text{für } 0{,}5 \le x \le 1 \end{cases}$$