Auszug
aus den Medien zum Schulbuch
ISBN 978-3-12-735471-3

Lambacher Schweizer

Mathematik Einführungsphase

Anleitung zum Arbeiten mit MMS
GeoGebra

Nordrhein-Westfalen

Klett

Quellennachweis

GeoGebra GmbH, Linz, **1.1; 1.2; 2.1; 2.2; 2.3; 2.4; 3.1; 3.2; 3.3; 4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 5.1; 5.2; 5.3; 6.1; 6.2; 6.3; 7.1; 7.2**

Die Reihenfolge und Nummerierung der Bild- und Textquellen im Quellennachweis erfolgt automatisch und entspricht u. U. nicht der Nummerierung der Bild- und Textquellen im Werk. Die automatische Vergabe der Positionsnummern erfolgt in der Regel von links oben nach rechts unten, ausgehend von der linken oberen Ecke der Abbildung.

Autor: Arnold Zitterbart

Entstanden in Zusammenarbeit mit dem Projektteam des Verlages.

Gestaltung: Petra Michel, Essen
Umschlaggestaltung: normaldesign GbR, Schwäbisch Gmünd
Titelbild: U1.1 Getty Images, München (Moment/John Hemmingsen); U1.2 ShutterStock.com RF, New York (Alekcey)
Satz: tiff.any GmbH, Berlin

Allgemeine Hinweise

GeoGebra kann als Software auf einem Rechner/Computer installiert oder als App auf einem Tablet genutzt werden. Beide Systeme beinhalten verschiedene Teilprogramme, die sich in verschiedenen Ansichten, wie der Algebra-Ansicht, der Grafik-Ansicht und der Tabellenkalkulation, aufrufen lassen. Die Ansichtsfenster können gleichzeitig geöffnet sein und sind inhaltlich miteinander verbunden. So können z. B. die Graphen von Funktionen, die im **CAS**-Fenster definiert werden, im **Grafik**-Fenster dargestellt werden. Der Aufruf der verschiedenen Perspektiven erfolgt über das Icon im Balken des Hauptmenüs rechts oben unter dem Menüpunkt *Perspektiven*. Über den Menü-Punkt *Ansicht* lassen sich zu einer Perspektive zusätzliche Fenster hinzufügen bzw. nicht benötigte Fenster abschalten.
Für die bequeme Eingabe von mathematischen Sonderzeichen stellt die App über eine entsprechende Software-Tastatur zur Verfügung. Dezimalzahlen werden meist mit einem Punkt statt einem Komma dargestellt. Das Komma dient stattdessen dazu, Argumente und Befehle voneinander zu trennen.

1. Terme, Gleichungen und Formeln

a) Terme und Variablen

Im **CAS**-Fenster kann man in der Eingabezeile Terme mit und ohne Variablen eingeben. Bei einem neuen Dokument sind alle Variablen automatisch unbelegt. Gibt man dann einen Term ein, so wird er nach der Bestätigung mit der ENTER-Taste unverändert zurückgegeben, vgl. Fig. 1, Zeile 1.
Sollen die Variablen eines Terms mit bestimmten Werten belegt werden, gibt man den Term als Funktionsterm ein und lässt den Funktionswert mit der entsprechenden Variablenbelegung berechnen, vgl. Fig. 1, Zeilen 2 und 3.
Im **CAS**-Fenster werden Berechnungen standardmäßig exakt ausgeführt. Ist das Icon ≈ aktiv, werden gerundete Dezimalzahlen ausgegeben, vgl. Fig. 1, Zeilen 4 und 5.

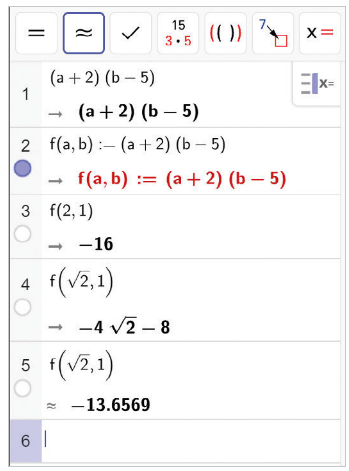

Fig. 1

b) Lösen von Gleichungen

Im **CAS**-Fenster werden Gleichungen mithilfe des *Löse*-Befehls bearbeitet. Hinter der Gleichung muss mit Komma getrennt die Variable eingegeben werden, nach der die Gleichung aufgelöst werden soll, vgl. Fig. 2, Zeilen 1 und 2. Dezimalzahlen als Lösungen erhält man, wenn der *Löse*-Befehl mit ≈ bestätigt wird.
Falls man als Ergebnis des *Löse*-Befehls „{ }" erhält, hat die Gleichung keine Lösung, erhält man „x = x", ist die Gleichung allgemeingültig bzw. die Terme rechts und links des Gleichheitszeichens sind äquivalent, vgl. Fig. 2, Zeilen 3 und 4.
Ungleichungen lassen sich genauso wie Gleichungen lösen, vgl. Fig. 2, Zeile 5.
In manchen Fällen ist der Definitionsbereich einer Gleichung eingeschränkt, z. B. $\sin(2x) = -0{,}5,\ 0 \le x \le 2\pi$.
Die Lösungen dieser Gleichung können mithilfe des *Löse*-Befehls gefunden werden, bei dem die einschränkende Bedingung zusammen mit der Lösungsvariablen eingegeben wird, vgl. Fig. 2, Zeile 6.

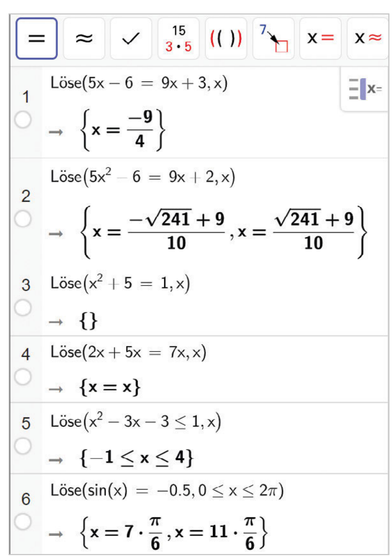

Fig. 2

c) Gleichungssysteme

Systeme mit mehreren Gleichungen werden übersichtlich gelöst, indem man zunächst Variablen für die einzelnen Gleichungen definiert und anschließend die Gleichungen und Lösungsvariablen, jeweils in Klammern zusammengefasst, in den *Löse*-Befehl eingibt, vgl. Fig. 1.

Besondere Vorteile bietet ein CAS bei der Funktionsanpassung ganzrationaler Funktionen.
Beispiel: Gesucht ist eine ganzrationale Funktion der Form

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad \text{mit} \quad f(1) = 4,\; f'(3) = 0,\; f(9) = 2$$

Nach der Definition der Funktion und ihrer Ableitung können die Bedingungen symbolisch direkt in den *Löse*-Befehl eingegeben werden, vgl. Fig. 2.

d) Formeln umstellen

Mithilfe des *Löse*-Befehls kann man im **CAS**-Fenster auch Formeln mit Variablen nach bestimmten Variablen auflösen. Dazu gibt man zuerst die umzustellende Formel und dann die Variable ein, nach der umgestellt werden soll, vgl. Fig. 3.

2. Funktionen und Differentialrechnung

a) Funktionsgraphen darstellen

Funktionen kann man im **Algebra**- oder im **CAS**-Fenster eingeben. Bestätigt man die Eingabe mit ENTER, wird die eingegebene Funktion im **Grafik**-Fenster dargestellt und links in der Eingabezeile erscheint ein farbiger Kreis. Die zugehörige Grafik hat im **Grafik**-Fenster dieselbe Farbe. Indem man auf den Kreis klickt, kann man die grafische Darstellung ein- und ausblenden, vgl. Fig. 4.
Über die Einstellungen in der Grafik-Ansicht kann man den minimalen und maximalen Wert der x- und der y-Achse anpassen. Das Fenster lässt sich auch mit den Lupen und dem Mausrad anpassen. Am Tablet kann man das Fenster einstellen, indem man das Bild mit zwei Fingern größer oder kleiner zieht.

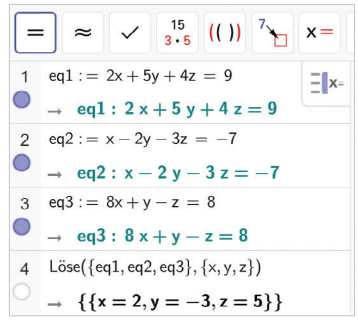

Fig. 1

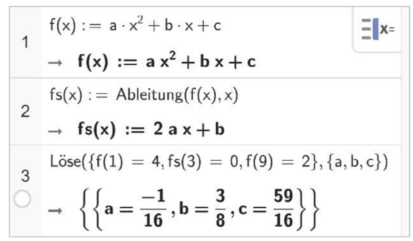

Fig. 2

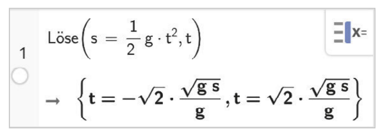

Fig. 3

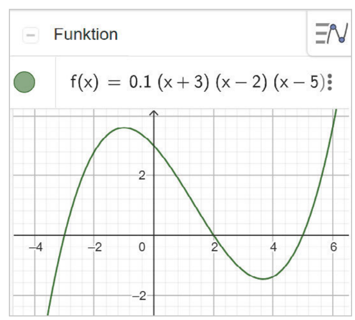

Fig. 4

b) Wertetabellen

Mithilfe der **Tabellenkalkulation** kann man Wertetabellen erstellen. Mit ☰ *Ansicht/Tabelle* erzeugt man zunächst eine leere Tabelle. In diese trägt man bei A1 den Startwert der Wertetabelle ein, z. B. −4. In Zelle B1 trägt man „= f(A1)" ein und kopiert B1 passend zu Spalte A nach unten, vgl. Fig. 1.

	A	B
1	-4	-5.4
2	-3	0
3	-2	2.8
4	-1	3.6
5	0	3

Fig. 1

c) Abtasten eines Graphen (Trace)

Um den Graphen abzutasten, legt man mit dem Geometrie-Werkzeug einen Punkt auf den Graphen. Seine Koordinaten werden im **Algebra**-Fenster angezeigt. Mit der Maus oder mit den Pfeiltasten lässt sich der Punkt auf dem Graphen bewegen und seine Koordinaten werden im **Algebra**-Fenster angezeigt.
Für ein genaueres Arbeiten erzeugt man im **Algebra**-Fenster einen Schieberegler, den man über ⋮ konfigurieren kann. Man gibt dazu einen Parameter b im Eingabefenster ein, er wird automatisch als Schieberegler angesehen, und definiert den Punkt $B(b, f(b))$. Der Punkt lässt sich über den Schieberegler bewegen und seine Koordinaten werden im **Algebra**-Fenster angezeigt, vgl. Fig. 2.

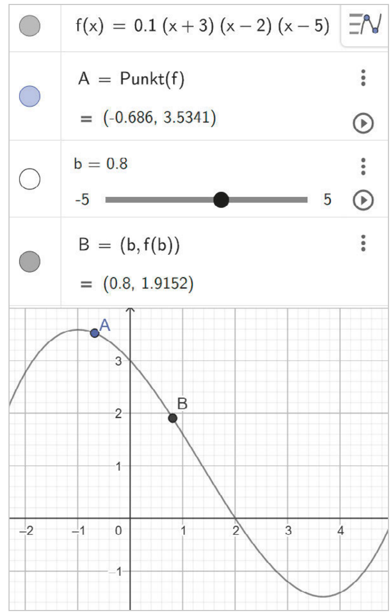

Fig. 2

d) Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen

Durch die Eingabe eines Parameters in der Algebra-Ansicht wird automatisch ein Schieberegler für den Parameter erzeugt, vgl. Fig. 3. Durch einen Rechtsklick kommt man über *Einstellungen* zu den Eigenschaften des Schiebereglers und kann dort die gewünschten Werte für die Intervallgrenzen und die Schrittweite des Schiebereglers eingeben. Man kann den Schieberegler auch direkt mithilfe des Befehls *Schieberegler (<Min>, <Max>, <Schrittweite>)* definieren.

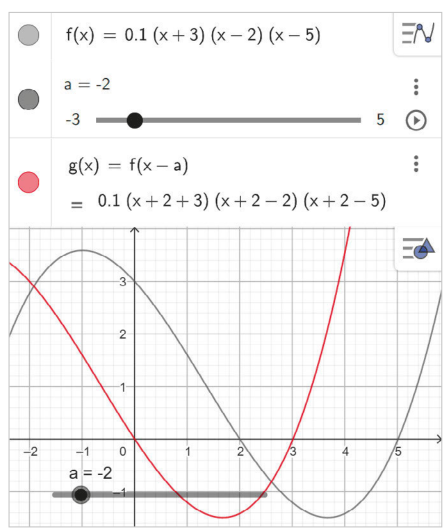

Fig. 3

e) Eigenschaften von Funktionen und ihren Graphen

Mit GeoGebra kann man Nullstellen, Extrempunkte oder die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen von Funktionen bzw. deren Graphen bestimmen. Wenn man die Funktion im **Algebra**-Fenster eingegeben hat, klickt man dazu in der Eingabezeile auf das Kontextmenü ⋮ und wählt *Spezielle Punkte* aus. Im **Algebra**-Fenster werden dann Nullstellen, Extrema und der Schnittpunkt mit der y-Achse aufgelistet und automatisch im **Grafik**-Fenster eingezeichnet, vgl. Fig. 1 und Fig. 2.

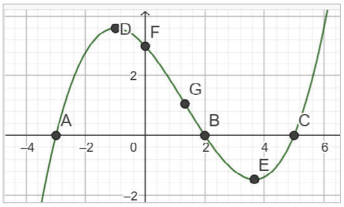

Fig. 1

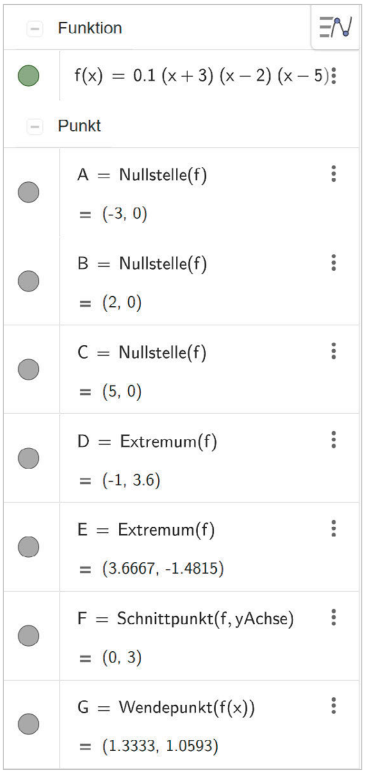

Fig. 2

Die speziellen Punkte lassen sich auch einzeln mit den entsprechenden Befehlen bestimmen:
Nullstelle(f) bestimmt die **Nullstellen**.
Extremum(f) bestimmt alle **Extrempunkte**.
Schnittpunkt(f,yAchse) bestimmt den **Schnittpunkt mit der y-Achse.**
Wendepunkte können nicht im Kontextmenü, sondern müssen im **Algebra**-Fenster mit dem speziellen *Wendepunkt*-Befehl bestimmt werden, vgl. Fig. 2.

Arbeitet man im **CAS**-Fenster, müssen die speziellen Punkte getrennt mit den entsprechenden Befehlen bestimmt werden. Die Punkte werden nicht automatisch im **Grafik**-Fenster angezeigt.

Die **Schnittpunkte zweier Graphen** werden im **Algebra**- und im **CAS**-Fenster mit dem Befehl *Schnittpunkt (,)* bestimmt, vgl. Fig. 3.

Im **Grafik**-Fenster kann man das Icon aktivieren und nun mit der Maus auf einen Schnittpunkt der beiden Graphen tippen.

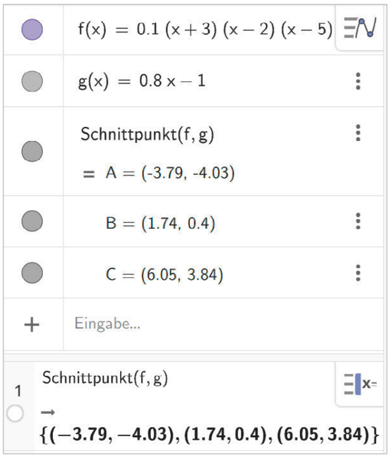

Fig. 3

Symmetrienachweis

Der Funktionsgraph der Funktion f mit $f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}x$ lässt eine Symmetrie zum Koordinatenursprung vermuten.
Folglich soll für alle $x \in D_f$ die Gleichung $f(-x) = -f(x)$ erfüllt sein.
Die Allgemeingültigkeit dieser Gleichung lässt sich mit dem *solve*-Befehl nachweisen, vgl. Fig. 1.

Entsprechend verifiziert man für Funktionen, bei denen man eine Symmetrie zur y-Achse vermutet, die Allgemeingültigkeit der Gleichung $f(-x) = f(x)$.

f) Tangente bzw. Normale in einem Kurvenpunkt

Im **CAS**-Fenster lässt sich die Tangente in einem Berührpunkt mithilfe des *Tangente*-Befehls direkt definieren, vgl. Fig. 2, Zeile 2.
Für die Normale in einem Kurvenpunkt gibt es keinen entsprechenden Befehl. Man muss daher auf die Formel für die Normale zurückgreifen und dazu zuerst die Ableitung an der betreffenden Stelle bestimmen, vgl. Fig. 2, Zeilen 3 und 4.

Mit GeoGebra lässt sich die Normale direkt entsprechend der Formel definieren, vgl. Fig. 3.

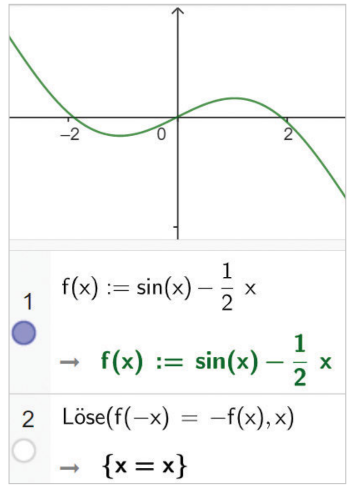

Fig. 1

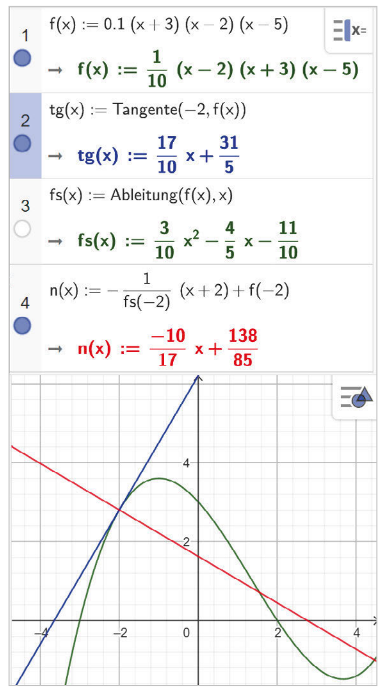

Fig. 2

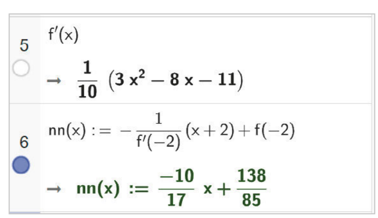

Fig. 3

g) Differentialrechnung im CAS-Fenster

Mithilfe des Befehls *Ableitung* kann die Ableitungsfunktion definiert werden, vgl. Fig. 1, Zeile 2.
Die Ableitung z.B. an der Stelle $x = 3$ bestimmt man, indem man $x = 3$ in die Ableitungsfunktion einsetzt, vgl. Fig. 1, Zeile 3.
Mit GeoGebra kann man auf die Ableitungsfunktion direkt mit $f'(x)$ zugreifen, vgl. Fig. 1, Zeile 4.
Enthält eine Funktionsgleichung Parameter, dann behandelt GeoGebra diese automatisch wie Konstanten.
Bestimmt man die Ableitung mit der Strich-Symbolik, wird nach der Funktionsvariablen abgeleitet. Will man nach dem Parameter ableiten, muss der *Ableitung*-Befehl benutzt werden, vgl. Fig. 1, Zeilen 5–7.

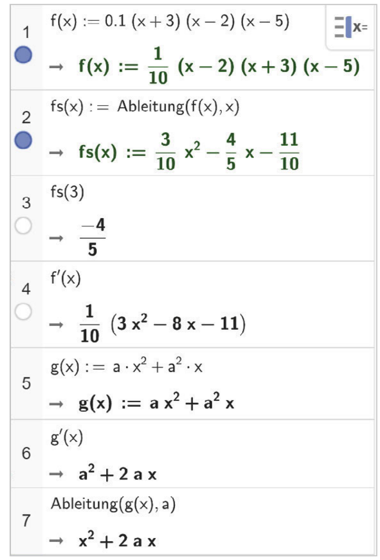

Fig. 1

Steigungswinkel einer Tangente

Der Wert der Ableitung an einer bestimmten Stelle ist der Tangens des Steigungswinkels der Tangente. Der Steigungswinkel kann mithilfe des Arcustangens ($\tan^{-1}$) bestimmt werden. Im **CAS**-Fenster wird standardmäßig im Bogenmaß gerechnet. Das Ergebnis muss daher in das Gradmaß umgerechnet werden, vgl. Fig. 2.

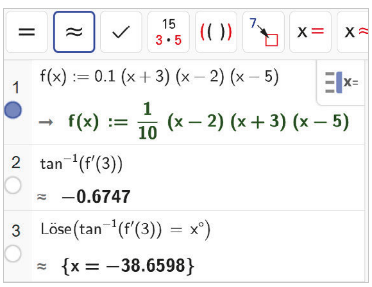

Fig. 2

3. Analytische Geometrie Vektoren, Geraden

a) Rechnen mit Vektoren

In der Analytischen Geometrie werden als Ansichten das **CAS**-Fenster und die **3D-Grafik** verwendet. Vektoren werden als Spaltenvektoren ausgegeben, wenn man Kleinbuchstaben für die Bezeichnung der Vektoren verwendet, vgl. Fig. 3, Zeilen 1 und 2. In der **3D-Grafik** werden sie dann als Ortsvektoren der entsprechenden Punkte dargestellt.

Linearkombinationen

Linearkombinationen von Vektoren können in der üblichen mathematischen Notation erzeugt werden, vgl. Fig. 3, Zeile 3.

Länge eines Vektors

Mit dem *Länge*-Befehl erhält man die Länge eines Vektors, vgl. Fig. 3, Zeile 4.

Kollinearität von Vektoren

Zwei Vektoren sind kollinear bzw. parallel, wenn sie Vielfache voneinander sind. Dies kann einfach mit dem *Löse*-Befehl untersucht werden, vgl. Fig. 3, Zeilen 5–7. Falls der *Löse*-Befehl als Ergebnis „{ }“ liefert, sind die Vektoren nicht parallel.

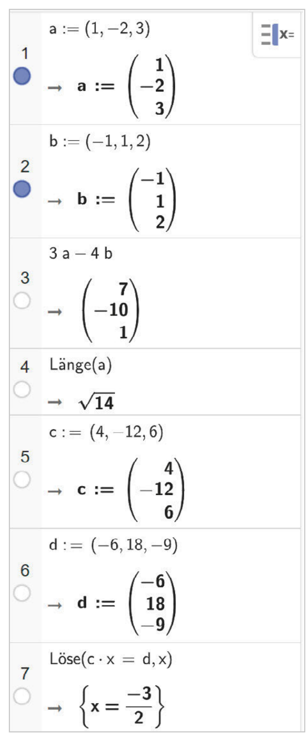

Fig. 3

b) Geraden

Geraden in Parameterform werden als Vektorfunktion definiert. Damit können für vorgegebene Parameterwerte die entsprechenden Geradenpunkte bestimmt werden. Auch wenn der Stützvektor und der Richtungsvektoren als Spaltenvektor eingegeben werden, werden die Geradenpunkte durch Zeilenvektoren beschrieben, vgl. Fig. 1, Zeilen 1–3.
Die Geraden werden in der **3D-Grafik** ohne weitere Einstellungen angezeigt, vgl. Fig. 2.

Schnitt von Geraden

Eine Vektorgleichung kann mit dem *Löse*-Befehl gelöst werden.
Falls sich die Geraden schneiden, kann zur Berechnung des Schnittpunktes einer der Parameter in die Vektorfunktion der entsprechenden Geraden eingesetzt werden, vgl. Fig. 1, Zeilen 3–6.
Falls sich die Geraden nicht schneiden, liefert der *Löse*-Befehl als Ergebnis „{ }“.

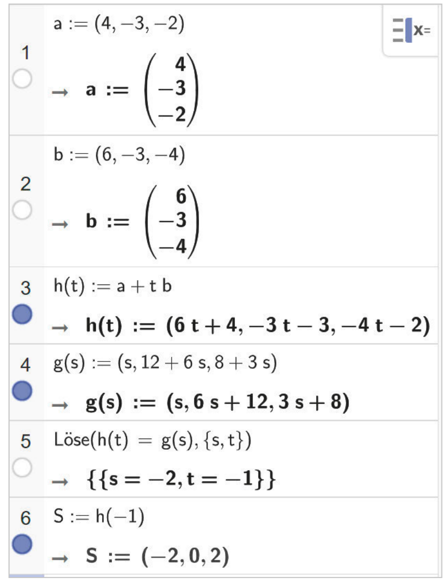

Fig. 1

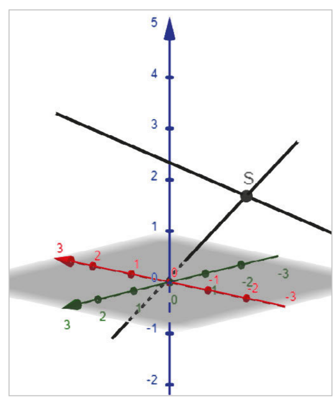

Fig. 2

Lambacher Schweizer

Ein klares Konzept für differenziertes Lernen