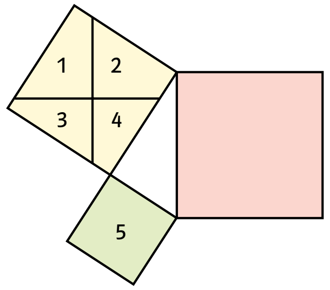
1 Der Satz des Pythagoras

Eine Kopiervorlage mit diesem und weiteren Puzzles befindet sich auf der Begleit-CD.

„Beweisideen für Pythagoras"



Erstelle aus Papier Figuren, die zu den durchnummerierten Figuren kongruent (d.h. deckungsgleich) sind. Du kannst hierzu zunächst dünnes Papier über das Bild legen, die Figuren 1 bis 5 abzeichnen und dann ausschneiden. Versuche die fünf Figuren so in das rote Quadrat zu legen, dass es komplett ausgefüllt wird. Formuliere eine Schlussfolgerung.

Bei vielen geometrischen Konstruktionen und Berechnungen spielen rechtwinklige Dreiecke eine Rolle. Solche Dreiecke wurden bisher mithilfe von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal untersucht, man kann aber auch Größen in solchen Dreiecken berechnen. Eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Berechnung von Größen im rechtwinkligen Dreieck ist der **Satz des Pythagoras**, der zu den berühmtesten Sätzen der Mathematik gehört. Mithilfe dieses Satzes kann man bei zwei bekannten Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck die dritte Seitenlänge berechnen. Um den Satz herzuleiten, werden in Fig. 1 zunächst Flächeninhalte betrachtet.

Deckungsgleiche Figuren nennt man auch kongruent. Wegen des Kongruenzsatzes sws für Dreiecke sind die gelben Dreiecke in Fig. 1 kongruent, denn sie stimmen jeweils in den Seiten a und b und dem dazwischen liegenden rechten Winkel überein.

Wenn man in einem Quadrat in Fig. 1 an jeder Seite die Strecken a und b abträgt, entstehen die vier zueinander kongruenten gelben rechtwinkligen Dreiecke und in der Mitte das rote Quadrat.

Für die Flächen in Fig. 1 gilt:

Gesamtes Quadrat: $A_{Gesamt} = (a + b)^2$

Rotes Quadrat: $A_{gelb} = c^2$

Ein gelbes Dreieck: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2}ab$

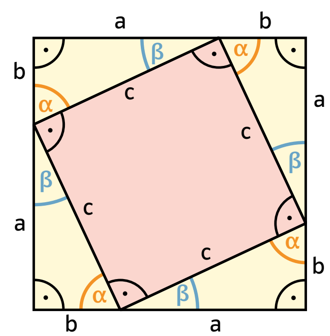


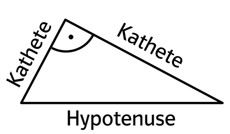
Fig. 1

Den Flächeninhalt des roten Quadrats erhält man ebenfalls, wenn man die Differenz der gesamten Fläche und der gelben Flächen betrachtet:

$A_{gelb} = (a + b)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right) = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$

Folglich gilt in Fig. 1: $A_{rot} = c^2 = a^2 + b^2$.

In Erkundung 1 auf Seite 72 kannst du einen weiteren Beweis durch Zerlegung sowie die Umkehrung des Satzes des Pythagoras untersuchen.



In Fig. 1 und Fig. 2 entsprechen a, b und c den Seitenlängen des gelben rechtwinkligen Dreiecks. Die Seite c, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, ist die längste Seite des rechtwinkligen Dreiecks und heißt **Hypotenuse**. Die beiden kürzeren Seiten a und b heißen **Katheten**. Aufgrund der obigen Überlegungen gilt, dass die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten a und b gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse c ist: $a^2 + b^2 = c^2$. Diesen Zusammenhang nennt man auch den Satz des Pythagoras.

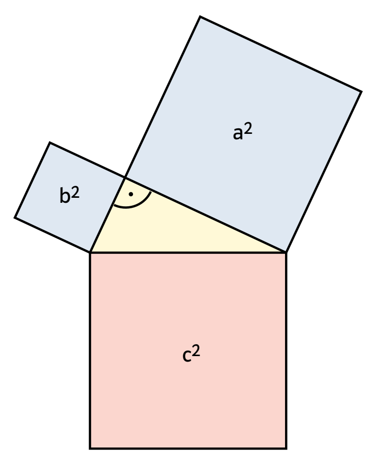
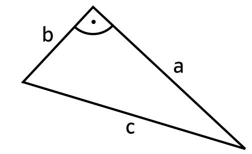
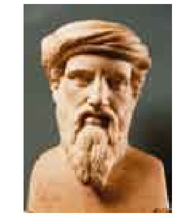


Fig. 2

Satz des Pythagoras:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c, dann gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.





Pythagoras (um 570 v. Chr. – um 475 v. Chr.)

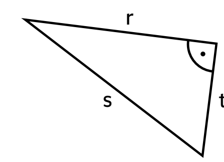
Es gilt auch die **Umkehrung des Satzes des Pythagoras**: Wenn in einem Dreieck für die Seitenlängen a, b und c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig und hat gegenüber der Seite c einen rechten Winkel. Mit der Umkehrung des Satzes des Pythagoras kann man ohne Winkelmesser entscheiden, ob ein Dreieck rechtwinklig ist oder nicht.

Die Gültigkeit der Umkehrung kann man mit dem Satz des Thales begründen.

Beispiel 1 Katheten und Hypotenuse erkennen und berechnen

a) Formuliere den Satz des Pythagoras für die abgebildete Fig. 1. Berechne s, wenn r = 6,5 cm und t = 3,8 cm ist.

b) Berechne t, wenn r = 4,3 cm und s = 12,1 cm ist.



Hypotenuse: s
Katheten: r und t

Fig. 1

Lösung:

a) Das Dreieck ist rechtwinklig, damit ist $r^2 + t^2 = s^2$.

Für die Hypotenuse gilt: $s = \sqrt{r^2 + t^2} = \sqrt{(6{,}5\,cm)^2 + (3{,}8\,cm)^2} = \sqrt{56{,}69\,cm^2} \approx 7{,}5\,cm$

b) Aus $r^2 + t^2 = s^2$ folgt:

$t^2 = s^2 - r^2$ bzw. $t = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{(12{,}1\,cm)^2 - (4{,}3\,cm)^2} = \sqrt{127{,}92\,cm^2} \approx 11{,}3\,cm$

$\sqrt{1\,m^2} = 1\,m$
$\sqrt{4\,m^2} = 2\,m$
$\sqrt{1\,cm^2} = 1\,cm$

Beispiel 2 Rechtwinklige Dreiecke erkennen und Seitenlängen berechnen

Die beiden Diagonalen einer Raute sind 2,3 cm und 3,2 cm lang.
Zeichne die Raute und berechne ihre Seitenlänge.

Lösung:

Die Diagonalen der Raute stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich. Das Dreieck ECD ist rechtwinklig. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

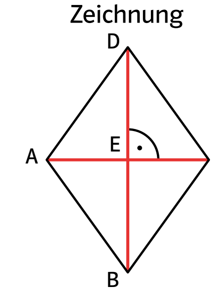
$\overline{CD}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{ED}^2$

Also ist:

$\overline{CD} = \sqrt{\overline{EC}^2 + \overline{ED}^2}$

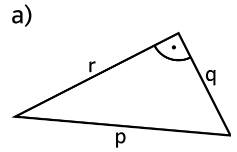
$= \sqrt{(1{,}15\,cm)^2 + (1{,}6\,cm)^2} = \sqrt{3{,}8825\,cm^2} \approx 2{,}0\,cm$

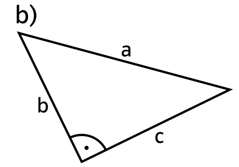
Zeichnung

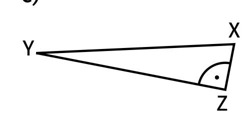


Aufgaben

1 Formuliere den Satz des Pythagoras für die abgebildeten Figuren.

a)


b)


c)


d)