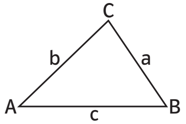
Dreiecke

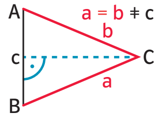
Dreiecksarten

Einteilung nach der Seitenlänge

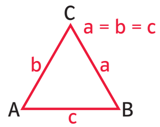
Allgemeines Dreieck
Alle drei Seiten sind paarweise unterschiedlich lang.
$a \neq b;\ a \neq c;\ b \neq c$



Gleichschenkliges Dreieck
Zwei der drei Seiten, die Schenkel, sind gleich lang. Die dritte Seite heißt Basis.



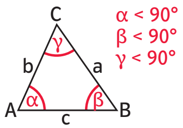
Gleichseitiges Dreieck
Alle drei Seiten sind gleich lang.



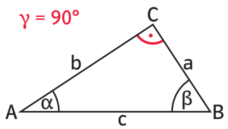
Einteilung nach der Größe der Innenwinkel

Winkelarten → S. 31

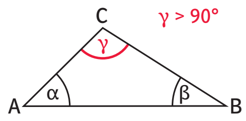
Spitzwinkliges Dreieck
Alle drei Innenwinkel sind spitze Winkel.



Rechtwinkliges Dreieck
Einer der drei Innenwinkel ist ein rechter Winkel.



Stumpfwinkliges Dreieck
Einer der drei Innenwinkel ist ein stumpfer Winkel.



Allgemeines Dreieck

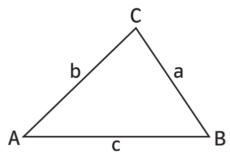
Umfang: $U = a + b + c$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$

$= \frac{1}{4}\frac{abc}{R}$ (R: Umkreisradius)

Heron'sche Formel: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\left(s = \frac{U}{2}\right)$

Dreiecksungleichung: $a + b > c;\ a + c > b;\ b + c > a$



Gleichschenkliges Dreieck

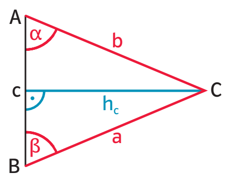
$a = b$ und $\alpha = \beta$

Länge der Höhe zur Basis: $h_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}c \cdot h_c$

Umkreisradius: $R = \frac{4h_c^2 + c^2}{8h_c}$

Inkreisradius: $r = \frac{ch_c}{2a + c}$



Gleichseitiges Dreieck

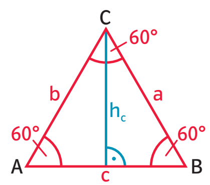
$a = b = c$ und $\alpha = \beta = \gamma = 60°$

Alle Höhen sind gleich lang: $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Flächeninhalt: $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

Umkreisradius: $R = \frac{a}{3}\sqrt{3}$

Inkreisradius: $r = \frac{a}{6}\sqrt{3}$



Rechtwinkliges Dreieck

Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt **Hypotenuse**. Die beiden anderen Seiten heißen **Katheten**.

Jede Kathete ist die Höhe zur anderen Kathete.
Die Höhe h zur Hypotenuse teilt diese in die beiden **Hypotenusenabschnitte** p und q.

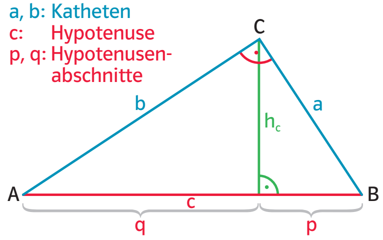
Für $\gamma = 90°$ gilt

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$,

Umkreisradius: $R = \frac{c}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$,

Inkreisradius: $r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

a, b: Katheten
c: Hypotenuse
p, q: Hypotenusenabschnitte



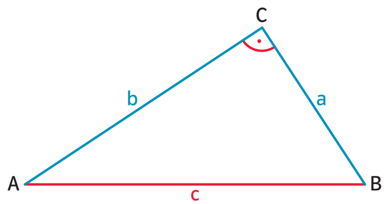
Sätze im rechtwinkligen Dreieck

Satz des Pythagoras

In jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten a und b und mit rechtem Winkel bei C gilt für die Seitenlängen a, b und c des Dreiecks $a^2 + b^2 = c^2$.

Umkehrung des Satzes von Pythagoras

Wenn in einem Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, und c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig mit der Hypotenuse c.

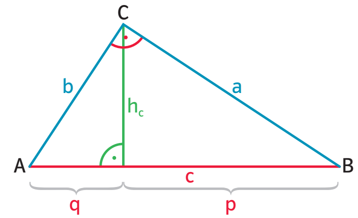


Kathetensatz

In jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten a und b und mit rechtem Winkel bei C gilt
$a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$.

Höhensatz

In jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C gilt $h^2 = p \cdot q$.



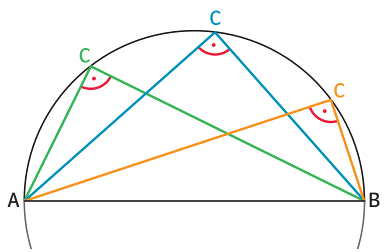
Satz des Thales

Wenn ein Punkt C auf dem Halbkreis über einer Strecke $\overline{AB}$ liegt **(Thales-Kreis)**, dann hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel.

Alternative Formulierung → S. 41

Umkehrung des Satzes von Thales

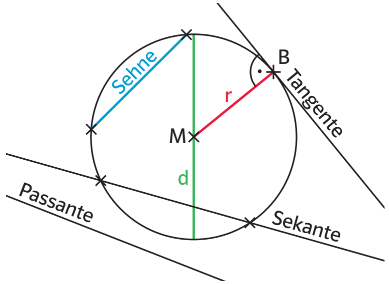
Wenn ein Dreieck ABC im Punkt C rechtwinklig ist, dann liegt der Punkt C auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{AB}$.

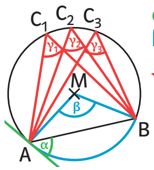


Kreis und Kreisteile

Bezeichnungen

Ein **Kreis** ist die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem gegebenen Punkt, dem **Mittelpunkt**, denselben Abstand haben. Dieser Abstand heißt **Radius** r des Kreises.
Eine Verbindungsstrecke von zwei Kreispunkten heißt **Sehne**.
Eine Sehne durch den Mittelpunkt heißt **Durchmesser** d. Es gilt $d = 2r$.
Die Verlängerung einer Sehne über beide Endpunkte hinaus zu einer Geraden heißt **Sekante.**
Eine Gerade, die mit dem Kreis genau einen (Berührungs-)Punkt B gemeinsam hat, heißt **Tangente**. Sie steht senkrecht auf dem Berührungsradius $\overline{MB}$.
Eine Gerade, die den Kreis nicht schneidet oder berührt, heißt **Passante**.



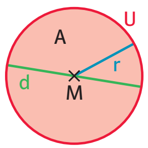


α: Sehnen-Tangenten-Winkel
β: Mittelpunktswinkel (Zentriwinkel)
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$: Umfangswinkel (Peripheriewinkel)

Kreis, Kreisring, Kreisausschnitt (Sektor) und Kreisabschnitt (Segment)

(A: Flächeninhalt; U: Umfang; b: Bogenlänge)

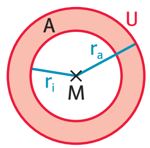
Kreis



$U = 2\pi r = 2\pi \frac{d}{2}$

$A = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$

Kreisring

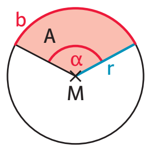


$U = 2\pi (r_a + r_i)$

$A = \pi \left(r_a^2 - r_i^2\right)$

$= \frac{\pi}{4}\left(d_a^2 - d_i^2\right)$

Kreisausschnitt (Sektor)



$U = 2r + b$

$b = 2\pi r \frac{\alpha}{360°}$

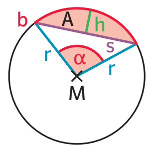
$= r \cdot \operatorname{arc}(\alpha)$

$A = \pi r^2 \frac{\alpha}{360°}$

$= \frac{1}{2} b r$

$= \frac{1}{2} r^2 \operatorname{arc}(\alpha)$

Kreisabschnitt (Segment)



$U = s + b$

$b = 2\pi r \frac{\alpha}{360°}$

$= r \cdot \operatorname{arc}(\alpha)$

$s = 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$= 2\sqrt{2hr - h^2}$

$h = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2}$

$A = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180°} - \sin(\alpha)\right)$

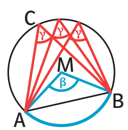
$= \frac{1}{2}(br - s(r - h))$

Bogenlänge → S. 31

Kreiswinkelsatz (Zentriwinkelsatz)

Der Mittelpunktswinkel (Zentriwinkel) β über einer Sehne ist doppelt so groß wie jeder der zugehörigen Umfangswinkel (Peripheriewinkel) γ: $\beta = 2\gamma$.

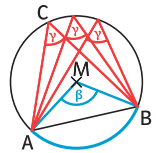
Für $\beta = 180°$ ergibt sich der Satz des Thales.



Umfangswinkelsatz (Peripheriewinkelsatz)

Alle Umfangswinkel (Peripheriewinkel) γ über derselben Sehne sind gleich groß.

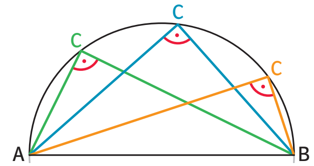
Es gilt $\gamma = \frac{\beta}{2}$.



Satz des Thales

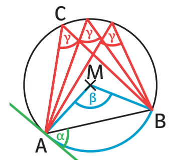
Peripheriewinkel über einem Halbkreis bzw. über jedem Durchmesser eines Kreises sind rechte Winkel.

Alternative Formulierung → S. 35



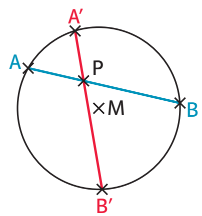
Sehnen-Tangenten-Winkelsatz

Sehnen-Tangenten-Winkel α sind gleich groß wie die zugehörigen Umfangswinkel (Peripheriewinkel) γ und halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel (Zentriwinkel) β auf der anderen Seite der Sehne.

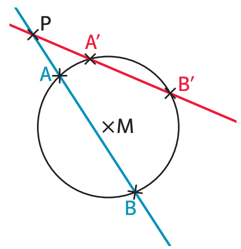


Sehnensatz, Sekantensatz und Sekanten-Tangenten-Satz

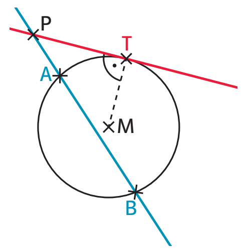
Sehnensatz
Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises in einem Punkt P, dann gilt:
$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{A'P} \cdot \overline{PB'}$.



Sekantensatz
Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises in einem Punkt P außerhalb des Kreises, dann gilt:
$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$.



Sekanten-Tangenten-Satz
Schneiden sich eine Tangente und eine Sekante eines Kreises in einem Punkt P außerhalb des Kreises, dann gilt: $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.



Kongruenz

Zueinander kongruente Figuren

Zwei Figuren heißen zueinander **kongruent** (deckungsgleich), wenn man sie durch geeignete Abbildungen (Kongruenzabbildungen) aufeinander abbilden kann, d.h., wenn sie in Form und Größe übereinstimmen.

Kongruenzabbildungen → S. 42