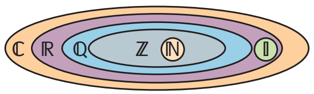
Zahlenmengen

Zahlenmenge	Ausführbare Operationen
Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3 \dots\}$	Addition und Multiplikation
Menge der gebrochenen Zahlen: $\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{N} \text{ und } b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$ Auch als positive abbrechende oder periodische Dezimalbrüche darstellbar.	Addition, Multiplikation und Division (außer durch 0)
Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	Addition, Subtraktion und Multiplikation
Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ Auch als abbrechende oder periodische Dezimalbrüche darstellbar.	Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (außer durch 0)
Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ Enthält neben $\mathbb{Q}$ auch die Menge $\mathbb{I}$ der irrationalen Zahlen wie π, e oder $\sqrt{2}$ (nicht als abbrechende oder periodische Dezimalbrüche darstellbar).	Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (außer durch 0) Wurzelziehen für nichtnegative Radikanden
Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \left\{z \,\middle|\, z = a + b\,i \wedge a, b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1}\right\}$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (außer durch 0)

komplexe Zahlen → S. 10



Intervalle

Abgeschlossenes Intervall:
$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

Offenes Intervall:
$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Linksoffenes Intervall:
$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$

Rechtsoffenes Intervall:
$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$

Unbeschränkte Intervalle:
$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$
$(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$
$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
$(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Zahldarstellungen

Stellenwertsysteme (Positionssysteme)

Darstellung einer Zahl $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$ mit der Basis b:
$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0)_b = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$.
In einem Stellenwertsystem mit der Basis b benötigt man zur Darstellung jeder natürlichen Zahl b Ziffern. Der Wert einer Ziffer hängt von ihrer Position (Stelle) ab.

Dezimalsystem (Zehnersystem)

Basis b = 10. Zur Darstellung einer Zahl verwendet man die Ziffern 0; 1; 2 … 8; 9.
Bei Darstellungen im Zehnersystem lässt man die Basis bei der Zahl weg.
$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$
Beispiel: $34\,204 = 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4$.

Zahldarstellungen

Dualsystem (Binärsystem)

Basis b = 2. Zur Darstellung einer Zahl verwendet man die Ziffern 0 und 1.
$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0)_2 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0$
Beispiel: $(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2 + 1 = 11$.

Hexadezimalsystem

Basis b = 16. Zur Darstellung einer Zahl verwendet man die Ziffern 0; 1; 2 … 9; A; B … F.
$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0)_{16} = a_n \cdot 16^n + a_{n-1} \cdot 16^{n-1} + a_{n-2} \cdot 16^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 16^2 + a_1 \cdot 16 + a_0$
Beispiel: $(B103F)_{16} = 11 \cdot 16^4 + 1 \cdot 16^3 + 3 \cdot 16 + 15 = 725\,055$.

Römische Zahlzeichen (Additionssystem)

Römische Zahlzeichen und ihre Bedeutung:
I: 1 V: 5 X: 10 L: 50 C: 100 D: 500 M: 1000

Der Wert eines römischen Zahlzeichens ist unabhängig von seiner Stelle, an der es steht. Römische Zahlzeichen werden hintereinandergeschrieben.
Im Allgemeinen beginnt man mit dem Zeichen mit dem größten Wert.
Steht ein Zahlzeichen rechts von einem gleichen oder höheren, so wird sein Wert addiert. Steht ein Zahlzeichen links von einem höheren, so wird sein Wert subtrahiert.
Die Zeichen I, X und C werden höchstens dreimal hintereinandergeschrieben. Die Zeichen V, L und D werden nicht vorangestellt und nicht wiederholt.
Beispiele: VII = 5 + 1 + 1 = 7 XVI = 10 + 5 + 1 = 16 XCV = 100 − 10 + 5 = 95.

Runden und Näherungswerte

Steht rechts von der Rundungsstelle eine 5, 6, 7, 8 oder 9, so wird **aufgerundet.**
Steht rechts von der Rundungsstelle eine 0, 1, 2, 3 oder 4, so wird **abgerundet.**

Näherungswerte erhält man durch Runden, beim Messen von Größen, beim Angeben von irrationalen Zahlen oder bei Überschlagsrechnungen.

Zuverlässige Ziffern
Dies sind alle Ziffern, die mit den Ziffern des genauen Wertes übereinstimmen. Alle Näherungswerte, die durch korrektes Runden entstanden sind, sind zuverlässige Ziffern.

Addieren und Subtrahieren von Näherungswerten
Man sucht den Näherungswert, dessen letzte zuverlässige Ziffer am weitesten links steht, und rundet das Ergebnis auf diese Stelle.

Multiplizieren und Dividieren von Näherungswerten
Man sucht den Näherungswert mit der geringsten Anzahl an zuverlässigen Ziffern und rundet das Ergebnis auf diese Anzahl an Ziffern.

Primzahlen

Teiler und Teilermenge → S. 6

Eine natürliche Zahl mit genau zwei Teilern (die 1 und sich selbst) heißt **Primzahl.**
Eine Primzahl p hat nur unechte Teiler: $T_p = \{1; n\}$.
Wenn sich eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ als Produkt zweier kleinerer natürlicher Zahlen a und b beschreiben lässt $(n = a \cdot b)$, dann heißt n **zusammengesetzt,** ansonsten **prim.**

Primfaktorzerlegung

Eine Zahl p heißt **Primfaktor** einer natürlichen Zahl n, wenn $p \mid n$ und p eine Primzahl ist. Alle natürlichen Zahlen größer als 1 lassen sich (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als ein Produkt von Primfaktoren schreiben, z. B. $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$.
Bei der **kanonischen Primfaktorzerlegung** einer Zahl $n \in \mathbb{N}, n > 1$ werden die Primfaktoren der Größe nach geordnet und gleiche Primfaktoren zu Potenzen zusammengefasst:
$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{e_n}$ mit den Primzahlen $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ und $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{N}^*$.